# سلسلة الفاروق







## للصف الأول الثانوي

### الفصل الدراسي الأول


إعداد : أ /عشري فاروق

ت/ ٠١١١٥٦٢٤٤٤٣١

## الدرس الأول: حل معادلة الدرجة الثانية فى متغير واحد فى ح

### الصورة العامة

$أ\,س^{٢} + ب\,س + حـ = ٠$

حيث أ ، ب ، حـ أعداد حقيقية ، $أ \neq ٠$

### مثال

* $س^{٢} - ٥\,س + ٦ = ٠$
* $س^{٢} + ٣\,س = ٠$
* $س^{٢} - ٤ = ٠$

### حل المعادلة فى ح

يقصد بحل المعادلة : $أ\,س^{٢} + ب\,س + حـ = ٠$

إيجاد قيم المتغير س التي تحقق تساوي طرفيها وتسمى هذه القيم جذور المعادلة

ويتم حل معادلة الدرجة الثانية في متغير واحد فى ح بطريقتين : جبرياً وبيانياً

### أولاً : الطريقة الجبرية

بإحدى طريقتين :

(أ) التحليل :

(ب) القانون العام

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤\,أ\,حـ}}{٢\,أ}$$

### مثال (١)

أوجد فى ح مجموعة الحل للمعادلات الآتية

(١) $س^{٢} + ٥\,س + ٦ = ٠$

(٢) $٩\,س^{٢} + ١٢\,س + ٤ = ٠$

(٣) $س^{٢} = ٢\,(\,س + ٦\,)$

(٤) $٩\,س^{٢} = ١٦$

(٥) $س + \frac{٥}{س} = ٤$ ، $س \neq ٠$

### الحل

(١) ∵ $س^{٢} + ٥\,س + ٦ = ٠$

∴ $(س + ٢)(س + ٣) = ٠$

إما $س + ٢ = ٠$ ∴ $س = -٢$

أو $س + ٣ = ٠$ ∴ $س = -٣$

∴ م.ح = $\{-٢ ، -٣\}$

---

(٢) $٤\,س^{٢} + ١٢\,س + ٩ = ٠$

∵ الحد الأوسط = ٢ √الحد الأول × √الحد الأخير

∴ المقدار ثلاثى مربع كامل

∴ $(\sqrt{\text{الحد الأول}} + \sqrt{\text{الحد الأخير}})^{٢} = ٠$

∴ $(٢\,س + ٣)^{٢} = ٠$

∴ $٢\,س + ٣ = ٠$

∴ $٢\,س = -٣$ ∴ $س = \frac{-٣}{٢}$

∴ م.ح = $\{\frac{-٣}{٢}\}$

**٣** ∵ س² = ٢(س + ٦)

∴ س² = ٢س + ١٢

∴ س² - ٢س - ١٢ = ٠

يصعب تحليل المقدار : (س² - ٢س - ١٢)

لذلك نوجد حل المعادلة التربيعية بالقانون العام

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - ٤ أ حـ}}{٢أ}$$

∵ أ = ١ ، ب = -٢ ، حـ = -١٢

$$∴ س = \frac{٢ \pm \sqrt{٤ - ٤ \times ١ \times (-١٢)}}{٢ \times ١}$$

$$∴ س = \frac{٢ \pm \sqrt{٤ + ٤٨}}{٢}$$

$$∴ س = \frac{٢ \pm \sqrt{٥٢}}{٢}$$

إما

$$∴ س = \frac{٢ + \sqrt{٥٢}}{٢} \simeq ٤,٦$$

أو

$$∴ س = \frac{٢ - \sqrt{٥٢}}{٢} \simeq -٢,٦$$

∴ م. ح = { ٤,٦ ، -٢,٦ }

==========================================

**٤** ٩س² = ١٦

∴ ٩س² - ١٦ = ٠

∴ (٣س - ٤)(٣س + ٤) = ٠

| أو: ٣س + ٤ = ٠ | إما: ٣س - ٤ = ٠ |
|---|---|
| ∴ ٣س = -٤ | ∴ ٣س = ٤ |
| $∴ س = \frac{-٤}{٣}$ | $∴ س = \frac{٤}{٣}$ |

$$∴ م. ح = \left\{ \frac{٤}{٣} ، \frac{-٤}{٣} \right\}$$

==========================================

**٥** ∵ $س + \frac{٥}{س} = ٤$ ، س ≠ ٠

بالضرب × س للطرفين

∴ س² + ٥ = ٤ س

∴ س² - ٤س + ٥ = ٠

ويصعب تحليل المقدار إلى عاملين

باستخدام القانون العام :

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - ٤ أ حـ}}{٢أ}$$

∵ أ = ١ ، ب = -٤ ، حـ = ٥

$$∴ س = \frac{٢ \pm \sqrt{١٦ - ٤ \times ١ \times ٥}}{٢ \times ١}$$

$$∴ س = \frac{٢ \pm \sqrt{١٦ - ٢٠}}{٢}$$

$$∴ س = \frac{٢ \pm \sqrt{-٤}}{٢}$$

، ∵ $\sqrt{-٤}$ ∉ ح

∴ م. ح = ∅

## مثال (٢)

أوجد في ح مجموعة الحل للمعادلات الآتية

١) س$^2$ + ٣ س = ٠

٢) ٢س$^2$ - ٥ س + ٢ = ٠

٣) س$^2$ - (١ + $\sqrt{3}$) س + $\sqrt{3}$ = ٠

## الحل

١) ∵ س$^2$ + ٣ س = ٠

بأخذ س عامل مشترك

∴ س (س + ٣) = ٠

| أو | إما |
|---|---|
| س + ٣ = ٠ | س = ٠ |
| ∴ س = -٣ | |

∴ م.ح = {٠ ، -٣}

---

٢) ٢س$^2$ - ٥ س + ٢ = ٠

∵ معامل س$^2$ لا يساوي ١

∴ المقدار غير بسيط

٢س - ١

س - ٢

∴ (٢س - ١) (س - ٢) = ٠

| أو | إما |
|---|---|
| س - ٢ = ٠ | س - ١ = ٠ |
| ∴ س = ٢ | ∴ س = $\frac{1}{2}$ |

∴ م.ح = {$\frac{1}{2}$ ، ٢}

---

٣) س$^2$ - (١ + $\sqrt{3}$) س + $\sqrt{3}$ = ٠

نوجد عددين حاصل ضربهم = $\sqrt{3}$

ومجموعهم = -(١ + $\sqrt{3}$)

∴ العددان هما : ١ ، $\sqrt{3}$

∴ (س - ١) (س - $\sqrt{3}$) = ٠

| أو | إما |
|---|---|
| س - $\sqrt{3}$ = ٠ | س - ١ = ٠ |
| ∴ س = $\sqrt{3}$ | ∴ س = ١ |

∴ م.ح = {١ ، $\sqrt{3}$}

## ثانياً : الطريقة البيانية

**ولحل معادلة الدرجة الثانية بيانياً**

١ نضع المعادلة على الصورة العامة

ا س$^2$ + ب س + حـ = ٠

٢ نفرض أن :

د ( س ) = ا س$^2$ + ب س + حـ

٣ نوجد نقطة رأس منحنى الدالة التربيعية

وهى ( $\frac{-ب}{٢ا}$ ، د ( $\frac{-ب}{٢ا}$ ) )

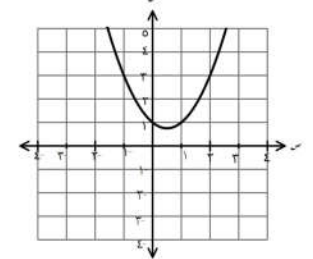
٤ نكون الجدول التالي

| س | | | | $\frac{-ب}{٢ا}$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| د(س) | | | | د($\frac{-ب}{٢ا}$) | | | |

٥ نمثل الدالة بيانياً

## وتوجد عدة حالات

**١ إذا كان منحنى الدالة التربيعية لايقطع محور السينات**

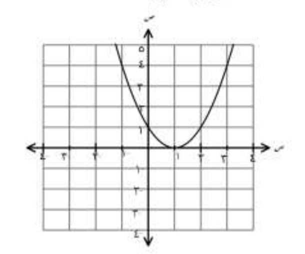


**∴ مجموعة حل المعادلة د ( س ) = ٠**

**فى ح هى** ∅

∴ ليس للمعادلة جذور حقيقية

**٢ إذا كان منحنى الدالة التربيعية يمس محور السينات**



فإن نقطة التماس هي : ( $\frac{-ب}{٢ا}$ ، ٠ )

**∴ مجموعة حل المعادلة د (س ) = ٠**

**فى ح هى** { $\frac{-ب}{٢ا}$ }

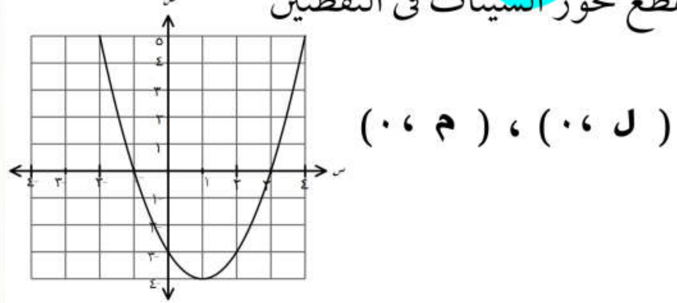
ويكون جذرا المعادلة حقيقيان متساويان

وكل منهما يساوي = $\frac{-ب}{٢ا}$

---

**٣ إذا كان منحنى الدالة التربيعية**

يقطع محور السينات فى النقطتين



( ل ، ٠ ) ، ( م ، ٠ )

**مجموعة حل المعادلة د (س ) = ٠**

**فى ح هى** { ل ، م }

ويكون جذرا المعادلة حقيقيان مختلفان

## مثال (٣)

أوجد فى ح مجموعة حل المعادلة

س^٢ - ٢ س = ٣ بيانيا

### الحل

(١) نضع المعادلة على الصورة العامة

∴ س^٢ - ٢ س - ٣ =

(٢) نفرض أن : د(س) = س^٢ - ٢ س - ٣

(٣) نوجد الإحداثى السينى لنقطة رأس المنحنى : س = -ب / ٢أ = ٢ / ٢ = ١

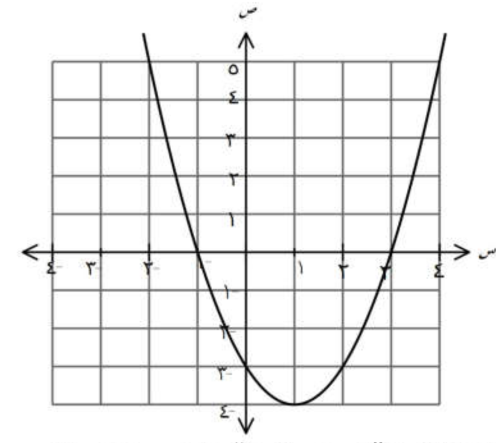
د(١) = (١)^٢ - ٢ × ١ - ٣

= ١ - ٢ - ٣ = -٤

(٤) نكون الجدول التالى

| س | ٤ | ٣ | ٢ | ١ | ٠ | -١ | -٢ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| د(س) | ٥ | ٠ | -٣ | -٤ | -٣ | ٠ | ٥ |

(٥) نمثل الدالة بيانياً

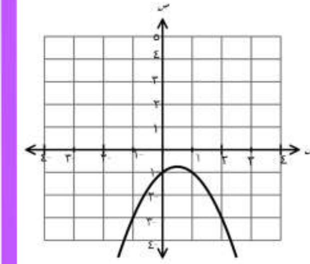


منحنى الدالة التربيعية يقطع محور السينات ( -١، ٠) ، (٣، ٠)

∴ مجموعة حل المعادلة د(س) = ٠ فى ح هى {-١، ٣}

## ملاحظات مهمة

(١) الشكل المقابل يمثل منحنى دالة تربيعية



د(س) = أس^٢ + ب س + حـ

ويكون :

(١) المنحنى مفتوح لأسفل ∴ أ < ٠

(٢) المنحنى لا يقطع محور السينات

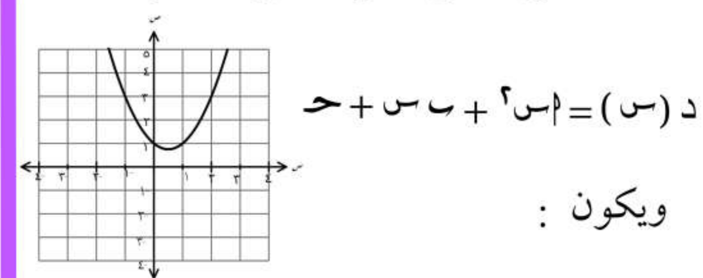
∴ ليس للمعادلة جذور حقيقية

وتكون مجموعة الحل فى ح هى ∅

(٣) قيمة المقدار : ب^٢ - ٤ أ حـ < ٠

(٤) المنحنى يقطع محور الصادات (٠، -١) ∴ حـ = -١

(٢) الشكل المقابل يمثل منحنى دالة تربيعية



د(س) = أس^٢ + ب س + حـ

ويكون :

(١) المنحنى مفتوح لأعلى ∴ أ > ٠

(٢) المنحنى لا يقطع محور السينات

∴ ليس للمعادلة جذور حقيقية

وتكون مجموعة الحل فى ح هى ∅

٣) قيمة المقدار : ب$^{٢}$ − ٤ أ حـ > ٠

٤) المنحنى يقطع محور الصادات

( ٠ ، ١ ) ∴ حـ = ١

## مثال ٤

إذا كانت : س = ٦ أحد جذرى المعادلة :

س$^{٢}$ + ٥ س + أ = ٠

فأوجد قيمة : أ ثم أوجد الجذر الآخر

## الحل

∵ س = ٦ جذر للمعادلة

(٦)$^{٢}$ + ٥ × ٦ + أ = ٠

∴ ٣٦ + ٣٠ + أ = ٠

∴ أ + ٦٦ = ٠

**∴ أ = −٦٦**

∴ المعادلة هى :

س$^{٢}$ + ٥ س − ٦٦ = ٠

∴ (س + ١١) (س − ٦) = ٠

إما س + ١١ = ٠ | أو س − ٦ = ٠

∴ س = −١١ | ∴ س = ٦

**∴ الجذر الآخر هو : س = −١١**

## مثال ٥

أوجد قيمتى : أ ، ب إذا علم أن : ٢ ، ٣

هما جذرا المعادلة :

أ س$^{٢}$ + ب س + ٦ = ٠

## الحل

∵ س = ٢ جذر للمعادلة

∴ ٤ أ + ٢ ب + ٦ = ٠

بالقسمة على ٢ للطرفين

∴ ٢ أ + ب + ٣ = ٠

**∴ ٢ أ + ب = −٣** ← (١)

∵ س = ٣ جذر للمعادلة

∴ ٩ أ + ٣ ب + ٦ = ٠

بالقسمة على ٣ للطرفين

∴ ٣ أ + ب + ٢ = ٠

**∴ ٣ أ + ب = −٢** ← (٢)

بطرح (١) من (٢)

**∴ أ = ١**

بالتعويض فى (١)

∴ ٢ + ب = −٣

**∴ ب = −٥**

**حل آخر**

**نكون المعادلة التى جذراها ٢ ، ٣**

∴ **المعادلة هى :**

(س - ٢ ) (س - ٣) = ٠

∴ س (س - ٣ ) - ٢ (س - ٣) = ٠

∴ س$^{٢}$ - ٣ س - ٢ س + ٦ = ٠

∴ س$^{٢}$ - ٥ س + ٦ = ٠

∴ **المعادلتان :**

س$^{٢}$ - ٥ س + ٦ = ٠

أ س$^{٢}$ + ب س + ٦ = ٠

جذراهما ٢ ، ٣ وتساوى الحد المطلق فيهما

∴ **بمقارنة المعاملات**

∴ أ = ١ ، ب = -٥

**مثـــال ٦**

**إذا كان (س - ٣) أحد عاملى المقدار**

**س$^{٢}$ - أ س + ٦ فأوجد قيمة : أ**

**ثم أوجد العامل الآخر**

**الحـــل**

∵ (س - ٣) **أحد عاملى المقدار**

س$^{٢}$ - أ س + ٦

∴ س = ٣ هو جذر المعادلة

س$^{٢}$ - أ س + ٦ = ٠

∴ (٣)$^{٢}$ - ٣ أ + ٦ = ٠

∴ ٩ - ٣ أ + ٦ = ٠

∴ ١٥ - ٣ أ = ٠

∴ ٣ أ = ١٥

∴ أ = ٥

∴ **المقدار هو** س$^{٢}$ - ٥ س + ٦

∴ **بتحليل المقدار إلى عاملين**

∴ س$^{٢}$ - ٥ س + ٦ = (س - ٢) (س - ٣)

∴ **العامل الآخر هو :** س - ٢

**مثـــال ٧**

**إذا كانت :**

د (س) = أ س$^{٢}$ + ب س + حـ ، د(٠) = -٣

**أوجد قيم :** أ ، ب ، حـ

**إذا علم أن جذرى المعادلة** د(س) = ٠ **هما :**

٣ ، $\frac{-١}{٢}$

**الحـــل**

∵ د(٠) = -٣

∴ (٠)$^{٢}$ + ب (٠) + حـ = -٣

∴ $ح = -٣$

∴ $د(س) = أ س^٢ + ب س - ٣$

∵ ٣ ، $\frac{-١}{٢}$ هما جذرى المعادلة : $د(س) = ٠$

∴ ٣ ، $\frac{-١}{٢}$ هما جذرى المعادلة

∴ $أ س^٢ + ب س - ٣ = ٠$ ⟵ (١)

∴ نكون المعادلة التى جذراها ٣ ، $\frac{-١}{٢}$

∴ $(س - ٣)(س + \frac{١}{٢}) = ٠$

∴ $(س - ٣)(٢س + ١) = ٠$

∴ $٢س^٢ + س - ٦س - ٣ = ٠$

∴ $٢س^٢ - ٥س - ٣ = ٠$ ⟵ (٢)

المعادلتان (١) ، (٢) جذراهما : ٣ ، $\frac{-١}{٢}$

والمعادلتان تشتركان فى حد من حدودهما

∴ بمقارنة المعاملات فى المعادلتين

∴ $أ = ٢$ ، $ب = -٥$

# مقدمة عن الأعداد المركبة ( ك )

**نعلم أن**

المعادلة : $س^2 + 1 = 0$ ليس لها حلى فى مجموعة الأعداد الحقيقية ( ح )

لأن : $س^2 = -1$

$\therefore س = \pm\sqrt{-1} \notin ح$

$\therefore م . ح = \emptyset$

لابد من البحث عن مجموعة جديدة من الأعداد لحل هذه المعادلة

## العدد التخيلي

هوالعدد الذى مربعه يساوى ( -1 )

$ت^2 = -1$ أو $ت = \sqrt{-1}$

وله الخاصية التالية : $\sqrt{-أ} = \sqrt{أ}\ ت$

$\sqrt{-3} = \sqrt{3}\ ت$

$\sqrt{-4} = 2\ ت$

$\sqrt{-3} \times \sqrt{-5} = \sqrt{3}\ ت \times \sqrt{5}\ ت$

$= \sqrt{15}\ ت^2 = -\sqrt{15}$

## قوى العدد ( ت )

### ١ القوى الأساسية

$ت^1 = ت$ ، $ت^2 = -1$

$ت^3 = -ت$ ، $ت^4 = 1$

### ٢ القوى المختلفة

لاحظ :

$ت^4 = 1$

، $ت^8 = ت^4 \times ت^4 = 1 \times 1$

، $ت^{12} = ت^4 \times ت^4 \times ت^4 = 1 \times 1 \times 1 = 1$

$\therefore ت^4 = ت^8 = ت^{12} = ت^{16} = ت^? = 1$

**ملحوظة**

$(ت)^{\text{عدد يقبل القسمة على ٤}} = 1$

### ٣ قوى العدد ( ت ) السالبة

لإيجاد قيمة $ت^{-14}$ نجمع على الأس مضاعف العدد ٤ الأكبر من ١٤ مباشرة

$\therefore ت^{-14} = ت^{-14+16} = ت^2 = -1$

، $ت^{-103} = ت^{-103+104} = ت^1 = ت$

### ٤ : قوى العدد ( ت ) بوجه عام

$ت^{4ن} = 1$ ، ن عدد صحيح

، $(ت)^{4ن+1} = ت^{4ن} \times ت^1 = ت$

، $(ت)^{4ن+2} = ت^{4ن} \times ت^2 = 1 \times -1$

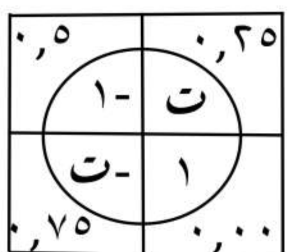
$(ت)^{4ن+3} = ت^{4ن} \times ت^3 = 1 \times -ت = -ت$

، $(ت)^{4ن+4} = ت^{4ن} \times ت^4 = 1 \times 1 = 1$

**معرفة قيمة (ت) مرفوعة لأس أى عدد**

نقسم الأس على ٤ ونحذف العدد الصحيح

فإذا كان المتبقى كما بالشكل





فمثلاً :

ت$^{٢٧٥}$ = ............

نقسم الأس على ٤

فيكون : ٢٧٥ ÷ ٤ = ٦٨,٧٥

نبحث عن ٠,٧٥ فى الشكل

فيكون الناتج هو : ( - ت )

## مثال ١

اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة

① ت$^{١٥}$ = ............

Ⓐ ت   Ⓑ - ت   Ⓒ ١   Ⓓ - ١

② ت$^{٢٤}$ = ............

Ⓐ ت   Ⓑ - ت   Ⓒ ١   Ⓓ - ١

③ ت$^{٣٣}$ = ............

Ⓐ ت   Ⓑ - ت   Ⓒ ١   Ⓓ - ١

④ ت$^{-١٩}$ = ............

Ⓐ ت   Ⓑ - ت   Ⓒ ١   Ⓓ - ١

⑤ أبسط صورة للمقدار:

( ١ + ت )$^{٢}$ = ............

⑥ أبسط صورة للمقدار : ( ١ - ت )$^{٢}$ = ........

Ⓐ ٢ت   Ⓑ -٢ت   Ⓒ ١   Ⓓ صفر

⑦ أبسط صورة للمقدار:

( ١ + ت + ت$^{٢}$ )$^{٢١}$ = ............

Ⓐ ت   Ⓑ - ت   Ⓒ ١   Ⓓ صفر

⑧ أبسط صورة للمقدار:

( ١ + ت + ت$^{٢}$ )$^{٤ن+٣}$ = ............

Ⓐ ت   Ⓑ - ت   Ⓒ ١   Ⓓ صفر

## مثال ٢

أوجد فى أبسط صورة كلاً مما يأتى

① $\frac{١}{ت^{٥}}$   ② ت$^{-١٨}$




## الحل

① $\frac{١}{ت^{٥}}$ = ت$^{-٥}$ × ١   ∵ ت$^{٨}$ = ١

= ت$^{-٥}$ × ت$^{٨}$

= ت$^{-٥+٨}$

= ت$^{٣}$

= - ت

② ∴ ت$^{-١٨}$ = ت$^{-١٨}$ × ١   ∵ ت$^{٢٠}$ = ١

= ت$^{-١٨}$ × ت$^{٢٠}$ = ت$^{-١٨+٢٠}$

= ت$^{٢}$ = - ١

## مثال ٣

**أوجد ناتج كلاً مما يأتى فى أبسط صورة**

① $\sqrt{-٢} \times \sqrt{-٨}$

② $\sqrt{-٧} \times \sqrt{٧}$

③ $\sqrt{-٢} \times \sqrt{-٣}$ ت

④ $(-٢ت)^{٢} \times (-٣ت)^{٢}$

⑤ $(١ + ت)^{١٠}$

## الحل

① $\sqrt{-٢} \times \sqrt{-٨}$

= $\sqrt{٢}$ ت × $\sqrt{٨}$ ت

= $\sqrt{١٦}$ $ت^{٢}$

= ٤ × -١

= -٤

==========================================

② $\sqrt{-٧} \times \sqrt{٧}$ = $\sqrt{٧}$ ت × $\sqrt{٧}$

= ٧ ت

==========================================

③ $\sqrt{-٢} \times \sqrt{-٣}$ ت

= $\sqrt{٢}$ ت × ( $\sqrt{٣}$ ت ) ت

= $\sqrt{٦}$ × $ت^{٣}$

= $\sqrt{٦}$ × - ت

= - $\sqrt{٦}$ ت

==========================================

④ $(-٢ت)^{٢} \times (-٣ت)^{٢}$

= ٤ $ت^{٢}$ × ٩ $ت^{٢}$

= ٣٦ × $ت^{٤}$

= ٣٦ × ١ = ٣٦

==========================================

⑤ $(١ + ت)^{١٠}$

= $[(١ + ت)^{٢}]^{٥}$

= $[١ + ٢ت + ت^{٢}]^{٥}$

∵ $ت^{٢}$ = -١

= $[\not{١} + ٢ت - \not{١}]^{٥}$

= $[٢ت]^{٥}$

= ٣٢ $ت^{٥}$

= ٣٢ ت

==========================================



## العدد المركب

هو العدد الذى يمكن كتابته على الصورة :

$$ع = أ + ب ت$$

حيث : أ ، ب أعداد حقيقية ، $ت^٢ = -١$

ويسمى : أ الجزء الحقيقى

ويسمى : ب الجزء التخيلى

### ملحوظة

إذا كان : ع = أ + ب ت وكان :

١) ب = صفر أى أن : ع = أ

فإن العدد ع يسمى حقيقى صرف

٢) أ = صفر أى أن : ع = ب ت

فإن العدد ع يسمى تخيلى صرف

٣) إذا كان : ع = صفر

فإن : أ = صفر ، ب = صفر

### مثال ٤

أوجد قيمتى س ، ص التى تحقق :

(س - ٦) + (٣ص + س) ت = ٠

### الحل

∵ العدد المركب : أ + ب ت = ٠

عندما أ = ٠ ، ب = ٠

∴ س - ٦ = ٠

∴ س = ٦ ⟵ ①

، ٣ص + س = ٠ ⟵ ②

بالتعويض من ① فى ②

∴ ٣ص + ٦ = ٠

∴ ٣ص = -٦

بالقسمة على ٣ للطرفين

∴ ص = -٢

### ملحوظة

١) مجموعة الأعداد الحقيقية هى مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد المركبة

∴ ح ⊂ ك

كل عدد حقيقى هو عدد مركب فيه الجزء التخيلى = صفر

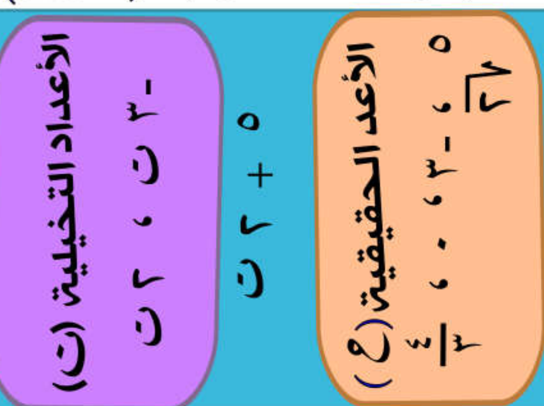
∴ ٣ = ٣ + ٠ ت

٢) جميع الأعداد التخيلية هى أعداد مركبة فيها الجزء الحقيقى = صفر

٢ت = ٠ + ٢ت



مجموعة الأعداد المركبة ( ك )




## تساوى عددين مركبين

**إذا كان** : $ع_{1} = س_{1} + ص_{1}ت$

، $ع_{2} = س_{2} + ص_{2}ت$

**عددان مركبان**

**فإن** : $ع_{1} = ع_{2}$

**إذا تحقق الشرطان الآتيان معا**

(١) $س_{1} = س_{2}$

(٢) $ص_{1} = ص_{2}$

---

**مثال ٥**

أوجد قيمتى س ، ص التى تحقق :

(س+ص) + ٣ت = ٥ + (س - ص) ت

**الحل**

**العددان**

(س+ص) + ٣ت ، ٥ + (س - ص) ت

**متساويان**

∴ س+ص = ٥ ← (١)

، س - ص = ٣ ← (٢)

**بجمع المعادلتين** (١) ، (٢)

٢س = ٨ ∴ س = ٤

**بالتعويض فى** (١)

∴ ٤ + ص = ٥

∴ ص = ٥ - ٤ ∴ ص = ١

---

## العمليات على الأعداد المركبة

### أولاً: جمع وطرح الأعداد المركبة

**إذا كان** : $ع_{1} = س_{1} + ص_{1}ت$

، $ع_{2} = س_{2} + ص_{2}ت$

**عددان مركبان**

**فإن** :

$ع_{1} + ع_{2}$

$= (س_{1} + س_{2}) + (ص_{1} + ص_{2})ت$

، $ع_{1} - ع_{2}$

$= (س_{1} - س_{2}) + (ص_{1} - ص_{2})ت$

### مثال ٦

أوجد قيمتى س ، ص التى تحقق :

س + ص ت = (١ + ٢ت) + (٣ + ٥ت)

### الحل

بوضع الطرف الايسر فى أبسط صورة

س + ص ت = (١ + ٣) + (٢ت + ٥ت)

∴ س + ص ت = ٤ + ٧ت

بمساواة الطرفين

∴ س = ٤ ، ص = ٧

---

### مثال ٧

أوجد قيمتى س ، ص التى تحقق :

س + ص ت = (١ + ٢ت) - (٢ - ٤ت)

### الحل

بوضع الطرف الايسر فى أبسط صورة

∵ س + ص ت = (١ + ٢ت) - (٢ - ٤ت)

∴ س + ص ت = ١ + ٢ت - ٢ + ٤ت

∴ س + ص ت = (١ - ٢) + (٢ت + ٤ت)

∴ س + ص ت = -١ + ٦ ت

بمساواة الطرفين

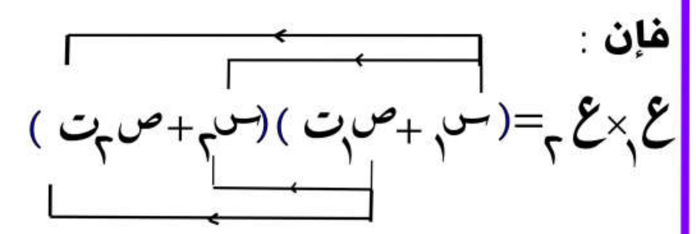
س = -١ ، ص = ٦

## ثانياً : ضرب الأعداد المركبة

إذا كان : $ع_1 = س_1 + ص_1 ت$ ، $ع_2 = س_2 + ص_2 ت$

عددان مركبان

فإن :



$ع_1 \times ع_2 = (س_1 + ص_1 ت)(س_2 + ص_2 ت)$

$= (س_1 س_2 - ص_1 ص_2) + (س_1 ص_2 + س_2 ص_1) ت$

---

### مثال ٨

أوجد قيمتى س ، ص التى تحقق

س + ص ت = (٣ + ٢ت)(١ + ٤ت)

### الحل

∵ س + ص ت = (٣ + ٢ت)(١ + ٤ت)

= ٣(١ + ٤ت) + ٢ت(١ + ٤ت)

= ٣ + ١٢ت + ٢ت + ٨ت$^2$

، ∵ ت$^2$ = -١

= ٣ + ١٢ت + ٢ت - ٨

= -٥ + ١٤ت

∴ س + ص ت = -٥ + ١٤ت

∴ س = -٥ ، ص = ١٤

## مثال ٩

أوجد ناتج مايأتى :

(٧ - ت) (٣ + ٢ت)

### الحل

(٧ - ت) (٣ + ٢ت)

= ٧ (٣ + ٢ت) - ت (٣ + ٢ت)

= ٢١ + ١٤ت - ٣ت - ٢ت$^{٢}$

= ٢١ + ١١ت + ٢

= ٢٣ + ١١ت

## العددان المترافقان

هما عددان يختلفان فى إشارة الجزء التخيلى فقط

العدد أ + ب ت مرافقه هو أ - ب ت

| العدد | ٣-٢ت | ٥+ت | ٣ت | ٧ | -٥ت | -٢ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| مرافقه | ٣+٢ت | ٥-ت | -٣ت | ٧ | ٥ت | -٢ |

## جمع عددان مترافقان

لأى عددين مترافقين

ع = أ + ب ت ، $ع_{٢}$ = أ - ب ت

فإن

$ع_{١}$ + $ع_{٢}$ = أ + ~~ب ت~~ + أ - ~~ب ت~~

= ٢أ

= ضعف الجزء الحقيقى

## طرح عددان مترافقان

لأى عددين مترافقين

$ع_{١}$ = أ + ب ت ، $ع_{٢}$ = أ - ب ت

فإن

$ع_{١}$ - $ع_{٢}$ = ~~أ~~ + ب ت - ~~أ~~ + ب ت

= ٢ب ت

،

$ع_{٢}$ - $ع_{١}$ = ~~أ~~ - ب ت - ~~أ~~ - ب ت

= -٢ب ت

## مثال ١٠

إذا كان $ع_{١}$ ، $ع_{٢}$ عددان مركبان :

$ع_{١}$ = ٥ + ٤ت ، $ع_{٢}$ = ٥ - ٤ت

فأوجد : (١) $ع_{١}$ + $ع_{٢}$ (٢) $ع_{١}$ - $ع_{٢}$

### الحل

(١) $ع_{١}$ + $ع_{٢}$ = ٥ + ~~٤ت~~ + ٥ - ~~٤ت~~

= ١٠

(٢) $ع_{١}$ - $ع_{٢}$ = (٥ + ٤ت) - (٥ - ٤ت)

= ~~٥~~ + ٤ت - ~~٥~~ + ٤ت

= ٨ت



## ضرب العددان المترافقان

لأى عددين مترافقين

$ع_1 = أ + ب ت$ ، $ع_2 = أ - ب ت$

فإن :

$ع_1 \times ع_2 = (أ + ب ت)(أ - ب ت)$

$= أ^2 - أ ب ت + أ ب ت - ب^2 ت^2$

$= أ^2 + ب^2$

= مربع الجزء الحقيقى + مربع الجزء التخيلى

حاصل ضرب العددان المترافقان

= مربع الجزء الحقيقى + مربع الجزء التخيلى

فمثلاً :

$(3 + 2ت)(3 - 2ت) = 9 + 4 = 13$

،

$(5 + ت)(5 + ت) = 25 + 1 = 26$

---

### مثال 11

اوجد فى أبسط صورة قيمة المقدار :

$(1 + ت)^2 + (3 + 2ت)(3 - 2ت)$

### الحل

$\because (1 + ت)^2 + (3 + 2ت)(3 - 2ت)$

مربع قوس من حدين — حاصل ضرب عددين مترافقين

$= 1 + 2ت + ت^2 + (9 + 4)$

$= 1 + 2ت - 1 + (13)$

$= 13 + 2ت$

---

### مثال 12

قيمة المقدار :

$\frac{(س + ص ت)(س - ص ت)}{س^2 + ص^2} = ..........$

### الحل

$\because$ المقدار $= \frac{(س + ص ت)(س - ص ت)}{س^2 + ص^2}$

$= \frac{س^2 + ص^2}{س^2 + ص^2} = 1$

---

## قسمة عددين مركبين

لوضع العدد : $\frac{أ + ب ت}{جـ + د ت}$ على الصورة : س + ص ت نضرب فى مرافق المقام بسطا ومقاما

وهو (جـ − د ت)

---

### مثال 13

أكتب العدد : $\frac{5}{1 + 2ت}$

على الصورة : أ + ب ت

### الحل

بالضرب فى مرافق المقام وهو (1 - 2 ت)

بسطا ومقاما

$$\frac{\text{٥}}{\text{١} + \text{٢ت}} = \frac{\text{٥}(\text{١} - \text{٢ت})}{(\text{١} + \text{٢ت})(\text{١} - \text{٢ت})}$$

$$= \frac{\text{٥}(\text{١} - \text{٢ت})}{\text{١} + \text{٤}}$$

$$= \frac{\text{٥}(\text{١} - \text{٢ت})}{\text{٥}}$$

$$= \text{١} - \text{٢ت}$$

================================

## مثال ( ١٤ )

أوجد قيمتى س ، ص التى تحقق

$$\text{٥} + \text{٣ت} = \frac{\text{س}^{\text{٢}} + \text{ص}^{\text{٢}}}{\text{س} + \text{صت}}$$

## الحل

$$\because \text{٥} + \text{٣ت} = \frac{\text{س}^{\text{٢}} + \text{ص}^{\text{٢}}}{\text{س} + \text{صت}}$$

بالضرب فى مرافق المقام بسطا ومقاما

$$\therefore \text{٥} + \text{٣ت} = \frac{(\text{س}^{\text{٢}} + \text{ص}^{\text{٢}})(\text{س} - \text{صت})}{(\text{س} + \text{صت})(\text{س} - \text{صت})}$$

$$\therefore \text{٥} + \text{٣ت} = \frac{(\text{س}^{\text{٢}} + \text{ص}^{\text{٢}})(\text{س} - \text{صت})}{\text{س}^{\text{٢}} + \text{ص}^{\text{٢}}}$$

$$\therefore \text{٥} + \text{٣ت} = \text{س} - \text{صت}$$

$$\therefore \text{س} = \text{٥} \quad , \quad \text{ص} = -\text{٣}$$

================================

## مثال ( ١ )

إذا كان: $\text{س} = \frac{\text{١٣}}{\text{٥} - \text{ت}}$ ، $\text{ص} = \frac{\text{٣} + \text{٢ت}}{\text{١} + \text{ت}}$

أثبت ان: س ، ص مترافقان

ثم أوجد قيمة المقدار: $\text{س}^{\text{٢}} + \text{س ص} + \text{ص}^{\text{٢}}$

## الحل

$$\text{س} = \frac{\text{١٣}}{\text{٥} - \text{ت}}$$

بالضرب × ( ٥ + ت ) بسطاً ومقاماً

$$\therefore \text{س} = \frac{\text{١٣}(\text{٥} + \text{ت})}{(\text{٥} - \text{ت})(\text{٥} + \text{ت})}$$

$$\therefore \text{س} = \frac{\text{١٣}(\text{٥} + \text{ت})}{\text{٢٥} + \text{١}}$$

$$\therefore \text{س} = \frac{\text{١٣}(\text{٥} + \text{ت})}{\text{٢٦}}$$

$$\therefore \text{س} = \frac{\text{٥}}{\text{٢}} + \frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{ت} \longrightarrow (\text{١})$$

$$, \because \text{ص} = \frac{\text{٣} + \text{٢ت}}{\text{١} + \text{ت}}$$

بالضرب × ( ١ - ت ) بسطاً ومقاماً

$$\therefore \text{ص} = \frac{(\text{٣} + \text{٢ت})(\text{١} - \text{ت})}{(\text{١} + \text{ت})(\text{١} - \text{ت})}$$

$$\therefore \text{ص} = \frac{\text{٣} - \text{٣ت} + \text{٢ت} - \text{٢ت}^{\text{٢}}}{\text{١} + \text{١}}$$

$$\therefore \text{ص} = \frac{\text{٣} - \text{٣ت} + \text{٢ت} + \text{٢}}{\text{١} + \text{١}}$$

$$\therefore \text{ص} = \frac{\text{٥} - \text{ت}}{\text{٢}}$$

∴ $ص = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} ت$ ⟵ (٢)

من : (١) ، (٢)

نجد أن س ، ص مترافقان

∵ $س + ص = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} ت + \frac{5}{2} - \frac{1}{2} ت$

∴ $س + ص = \frac{5}{2} + \frac{5}{2} = 5$

، $س ص = (\frac{5}{2} + \frac{1}{2} ت)(\frac{5}{2} - \frac{1}{2} ت)$

، $س ص = \frac{25}{4} + \frac{1}{4} = \frac{26}{4} = 6.5$

المقدار $= س^2 + س ص + ص^2$

بإضافة : س ص ، - س ص

∴ المقدار $= س^2 + 2 س ص + ص^2 - س ص$

$= (س + ص)^2 - س ص$

$= (5)^2 - 6.5$

$= 25 - 6.5 = 18.5$

# تحديد نوع جذري المعادلة التربيعية

عند حل المعادلة: $أس^2 + ب س + حـ = ٠$ حيث

: أ، ب، حـ أعداد حقيقية، أ $\neq$ ٠

باستخدام القانون العام فإننا نحصل على الجذرين :

$$س = \frac{-ب + \sqrt{ب^2 - ٤أحـ}}{٢أ} \quad ، \quad س = \frac{-ب - \sqrt{ب^2 - ٤أحـ}}{٢أ}$$

ونجد أن كلاً من الجذرين يحتوى على المقدار $\sqrt{ب^2 - ٤أحـ}$

ويسمى المقدار : $ب^2 - ٤أحـ$ مميز المعادلة التربيعية

## فإذا كان المميز

### المميز > ٠ ( موجباً ) فإن:

- جذرى المعادلة التربيعية حقيقيان مختلفان ويكون منحنى الدالة التربيعية المرتبط بالمعادلة التربيعية يقطع محور السينات فى نقطتين مختلفتين

**الشكل المقابل**

يمثل منحنى دالة تربيعية ويكون $ب^2 - ٤أحـ > ٠$

## مثال ١

عين نوع جذرى المعادلة التربيعية

$س + \frac{٦}{س} = ٥$ ، $س \neq ٠$

## الحل

$\because س + \frac{٦}{س} = ٥$ ، $س \neq ٠$ بالضرب فى س للطرفين

$\therefore س^2 + ٦ = ٥س$

$\therefore س^2 - ٥س + ٦ = ٠$

$\therefore أ = ١$ ، $ب = -٥$ ، $حـ = ٦$

$\because$ المميز $= ب^2 - ٤أحـ$

$\therefore$ المميز $= ٢٥ - ٤ \times ١ \times ٦$

$= ٢٥ - ٢٤ = ١ > ٠$

$\therefore$ الجذران حقيقيان مختلفان

### المميز = صفر فإن

- جذرى المعادلة التربيعية حقيقيان متساويان وكل منهما يساوى $= \frac{-ب}{٢أ}$
- الجذران مركبان مترافقان
- منحنى الدالة التربيعية المرتبط بالمعادلة يمس محور السينات فى النقطة $(\frac{-ب}{٢أ} ، ٠)$

**الشكل المقابل**

يمثل منحنى دالة تربيعية مميزها يساوى الصفر

$ب^2 - ٤أحـ = ٠$

## مثال ٢

عين نوع جذرى المعادلة التربيعية

$\text{س} + \frac{٩}{\text{س}} = ٦$ ، $\text{س} \neq ٠$

## الحل

∵ $\text{س} + \frac{٩}{\text{س}} = ٦$ ، $\text{س} \neq ٠$

بالضرب فى س للطرفين

∴ $\text{س}^٢ + ٩ = ٦\,\text{س}$

∴ $\text{س}^٢ - ٦\,\text{س} + ٩ = ٠$

∴ أ = ١ ، ب = −٦ ، حـ = ٩

∵ المميز = $\text{ب}^٢ - ٤\,\text{أ}\,\text{حـ}$

∴ المميز = ٣٦ − ٤ × ١ × ٩ = ٣٦ − ٣٦ = ٠

∴ الجذران حقيقيان متساويان

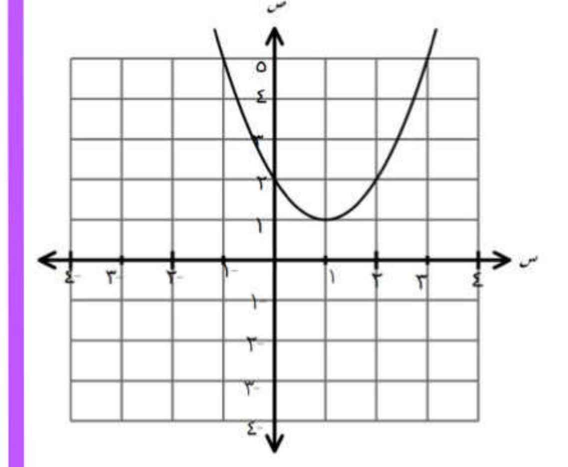
وكل من الجذرين = $\frac{-\text{ب}}{٢\,\text{أ}} = \frac{٦}{٢ \times ١} = ٣$

ومنحنى الدالة التربيعية المرتبط بالمعادلة يمس محور السينات فى (٣ ، ٠)

**المميز < صفر (سالب) فإن**

- الجذران مركبين غير حقيقيين
- إذا كانت المعاملات: أ، ب، حـ أعداد حقيقية كان الجذران مركبين مترافقين
- منحنى الدالة التربيعية المرتبط بالمعادلة لايقطع مع محور السينات

الشكل المقابل يمثل منحنى دالة تربيعية مميزها < ٠




يمثل منحنى دالة تربيعية

$\text{د}(\text{س}) = \text{أ}\,\text{س}^٢ + \text{ب}\,\text{س} + \text{حـ}$

ويكون المقدار : $\text{ب}^٢ - ٤\,\text{أ}\,\text{حـ} < ٠$

## مثال ٣

عين نوع جذرى المعادلة التربيعية

$\text{س}^٢ - ٣\,\text{س} + ٥ = ٠$

## الحل

∵ أ = ١ ، ب = −٣ ، حـ = ٥

∴ المميز = $\text{ب}^٢ - ٤\,\text{أ}\,\text{حـ}$

∴ المميز = ٩ − ٤ × ١ × ٥

= ٩ − ٢٠ = −١١ < ٠

∴ الجذران مركبان غير حقيقيين

، ∵ المعاملات أعداد حقيقية

∴ الجذران مركبان غير حقيقيين مترافقان

## مثال ٤

أثبت أن جذرى المعادلة :

٧س$^٢$ − ١١ س + ٥ = ٠ مركبان غير حقيقيين ثم استخدم القانون العام لإيجاد هذين الجذرين

## الحل

∵ ٱ = ٧ ، ب = −١١ ، حـ = ٥

∴ المميز = ١٢١ − ٤ × ٧ × ٥

= ١٢١ − ١٤٠ = −١٩ < ٠

∴ الجذران مركبان غير حقيقيين

∴ س = $\frac{١١ \pm \sqrt{-١٩}}{٢ \times ٧}$

∴ س = $\frac{١١ \pm \sqrt{١٩}\,ت}{٢ \times ٧}$

∴ س = $\frac{١١}{١٤} \pm \frac{\sqrt{١٩}}{١٤}$ ت

∴ م.ح = { $\frac{١١}{١٤} + \frac{\sqrt{١٩}}{١٤}$ ت ، $\frac{١١}{١٤} - \frac{\sqrt{١٩}}{١٤}$ ت }

---

## مثال ٥

أوجد قيمة ٱ التى تجعل جذرى المعادلة :

س$^٢$ − ٱ س + ٩ = ٠ متساويين

## الحل

∵ ٱ = ١ ، ب = −ٱ ، حـ = ٩

، ∵ الجذران متساويان

∴ المميز = ٠

∴ ب$^٢$ − ٤ ٱ حـ = ٠

∴ ٱ$^٢$ − ٤ × ١ × ٩ = ٠

∴ ٱ$^٢$ − ٣٦ = ٠

∴ ٱ = ± $\sqrt{٣٦}$ ∴ ٱ = ± ٦

---

## مثال ٦

إذا كان جذرا المعادلة :

س$^٢$ − ك س + ٢ ك − ٤ س + ٥ = ٠

متساويين فأوجد قيمة ك الحقيقية ثم أوجد الجذرين

## الحل

نضع المعادلة على الصورة العامة

∴ س$^٢$ − ( ك + ٤ ) س + ( ٢ ك + ٥ ) = ٠

∵ ٱ = ١ ، ب = −( ك + ٤ ) ، حـ = ( ٢ ك + ٥ )

، ∵ الجذران متساويان

∴ المميز = ٠

∴ ( ك + ٤ )$^٢$ − ٤ × ١ × ( ٢ ك + ٥ ) = ٠

∴ ك$^٢$ + ٨ ك + ١٦ − ٨ ك − ٢٠ = ٠

∴ ك$^٢$ − ٤ = ٠

∴ ك$^٢$ = ٤ ∴ ك = ± $\sqrt{٤}$ = ± ٢

عند ك = ٢

∴ المعادلة هى :

س$^2$ − ٦ س + ٩ = ٠

(س − ٣)$^2$ = ٠ ∴ س − ٣ = ٠

∴ س = ٣

عند ك = −٢

∴ المعادلة هى :

س$^2$ − ٢ س + ١ = ٠

(س − ١)$^2$ = ٠ ∴ س − ١ = ٠

∴ س = ١

∴ الجذران متساويان وكل منهما = ١

==============================

## مثال ٧

أوجد قيم م التى تجعل المعادلة :

جذور حقيقية :

(م + ١) س$^2$ − ٢ م س + م = ٠

ليس لها جذور حقيقية

## الحل

∵ أ = (م + ١) ، ب = −٢م ، جـ = م

، ∵ ليس للمعادلة جذور حقيقية

∴ المميز < ٠

∴ ب$^2$ − ٤ أ جـ < ٠

∴ (−٢م)$^2$ − ٤ (م + ١) × م < ٠

∴ ٤ م$^2$ − ٤ م$^2$ − ٤ م < ٠

∴ −٤ م < ٠ بالقسمة على −٤ للطرفين

∴ م > ٠ ∴ م ∈ ]٠ ، ∞[

==============================

## مثال ٨

أثبت أنه لجميع قيم أ ، ب يكون جذرا المعادلة

(س − أ) (س − ب) = ٥ حقيقيان مختلفان

## الحل

نضع المعادلة على الصورة العامة

∴ س$^2$ − ب س − أ س + أ ب = ٥

∴ س$^2$ − (ب + أ) س + (أ ب − ٥) = ٠

المميز = ب$^2$ − ٤ أ جـ

المميز = (−ب − أ)$^2$ − ٤ × ١ × (أ ب − ٥)

= ب$^2$ + ٢ أ ب + أ$^2$ − ٤ أ ب + ٢٠

= ب$^2$ − ٢ أ ب + أ$^2$ + ٢٠

= (ب − أ)$^2$ + ٢٠

∵ المقدار (ب − أ)$^2$ ≥ ٠

∴ المميز ≥ ٢٠

∴ جذرا المعادلة حقيقيان مختلفان

## ملحوظة

إذا كانت المعاملات : ا، ب، حـ فى المعادلة
ا $س^2$ + ب س + حـ = ٠ أعداداً نسبية
وكان المميز مربعاً كاملاً كان الجذران حقيقيين نسبيين

===

## مثال ٩

أثبت أن : جذرا المعادلة :
٣ $س^2$ - ٥ س - ٢ = ٠ أعداد نسبية

### الحل

∵ ا = ٣ ، ب = -٥ ، حـ = -٢
∴ المعاملات أعداد نسبية
، ∵ المميز = $ب^2$ - ٤ ا حـ
= ٢٥ - ٤ × ٣ × (-٢)
= ٢٥ + ٢٤ = ٤٩
= $(٧)^2$ = مربع كامل
∴ الجذران حقيقيان نسبيان

===

## مثال ١٠

إذا كان : ل ، م عددين نسبيين فأثبت أن جذرى المعادلة :
ل $س^2$ + ( ل - م ) س - م = ٠
عددين نسبيان

### الحل

∵ ا = ل ، ب = ( ل - م ) ، حـ = - م
، ل ، م أعداد نسبية
∴ المعاملات أعداد نسبية
، ∵ المميز = $ب^2$ - ٤ ا حـ
= $( ل - م )^2$ - ٤ × ل × ( - م )
= $ل^2$ - ٢ ل م + $م^2$ + ٤ ل م
= $ل^2$ + ٢ ل م + $م^2$
= $( ل + م )^2$
= مربع كامل
∴ الجذران نسبيان

===



## مثال (١١)

أوجد قيم العدد الحقيقى ك التى تحقق أن المعادلة : ( ك-٢ ) س$^{٢}$-٢ك س + ك = ٠ لهاجذران مركبان غير حقيقيين

## الحل

∵ أ = ( ك-٢ )، ب = -٢ك ، جـ = ك

∵ الجذران نسبيان

∴ المميز = ب$^{٢}$ - ٤أجـ

∴ المميز = ٤ ك$^{٢}$ - ٤ × ك × ( ك-٢ )

= ٤ ك$^{٢}$ - ٤ ك$^{٢}$ + ٨ ك = ٨ ك

∴ الجذران مركبان غير حقيقيين

∴ المميز < ٠ ∴ ٨ ك < ٠

∴ ك < ٠ ∴ ك ∈ ] -∞ ، ٠ [

# العلاقة بين جذري المعادلة التربيعية ومعاملات حدودها

إذا كان ل ، م

جذري المعادلة التربيعية : $أس^2 + ب س + حـ = 0$

فإن :

$$ل = \frac{-ب + \sqrt{ب^2 - 4 أ جـ}}{2 أ}$$

$$، م = \frac{-ب - \sqrt{ب^2 - 4 أ جـ}}{2 أ}$$

## ويكون

### ① مجموع جذري المعادلة التربيعية

$$ل + م = \frac{-ب + \sqrt{ب^2 - 4 أ جـ}}{2 أ} + \frac{-ب - \sqrt{ب^2 - 4 أ جـ}}{2 أ}$$

$$= \frac{-ب + \sqrt{ب^2 - 4 أ جـ} - ب - \sqrt{ب^2 - 4 أ جـ}}{2 أ}$$

$$= \frac{-2 ب}{2 أ} = \frac{-ب}{أ}$$

مجموع جذري أي معادلة تربيعية

$$= \frac{-ب}{أ} = \frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل س}^2}$$

في المعادلة : $3 س^2 + 5 س + 7 = 0$

$\because أ = 3$ ، $ب = 5$

$$\text{مجموع الجذرين} = \frac{-ب}{أ} = \frac{-5}{3}$$

### ② حاصل ضرب جذري المعادلة

$$ل \times م = \frac{-ب + \sqrt{ب^2 - 4 أ جـ}}{2 أ} \times \frac{-ب - \sqrt{ب^2 - 4 أ جـ}}{2 أ}$$

$$= \frac{(-ب + \sqrt{ب^2 - 4 أ جـ})(-ب - \sqrt{ب^2 - 4 أ جـ})}{4 أ^2}$$

$$= \frac{ب^2 - (ب^2 - 4 أ جـ)}{4 أ^2}$$

$$= \frac{ب^2 - ب^2 + 4 أ جـ}{4 أ^2}$$

$$= \frac{4 أ جـ}{4 أ^2}$$

$$= \frac{جـ}{أ}$$

$\therefore$ حاصل ضرب جذري أي معادلة

$$= \frac{جـ}{أ} = \frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل س}^2}$$

فمثلاً :

في المعادلة : $3 س^2 + 5 س + 7 = 0$

$\because أ = 3$ ، $ب = 5$ ، $جـ = 7$

$$\text{حاصل ضرب جذري المعادلة} = \frac{جـ}{أ} = \frac{7}{3}$$

### ٣ الفرق بين الجذرين

$$\text{ل} - \text{م} = \pm \frac{\sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\,\text{أ}\,\text{ح}}}{\text{أ}}$$

**مثال ١**

إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة

$٣\text{س}^{٢} + ٥\text{س} = ٧$

فأوجد :

(١) ل + م (٢) ل م (٣) ل - م

**الحل**

نضع المعادلة على الصورة العامة

∴ $٣\text{س}^{٢} + ٥\text{س} - ٧ = ٠$

∵ أ = ٣ ، ب = ٥ ، ح = -٧

(١) $\text{ل} + \text{م} = \frac{-\text{ب}}{\text{أ}} = \frac{-٥}{٣}$

(٢) $\text{ل}\text{م} = \frac{\text{ح}}{\text{أ}} = \frac{-٧}{٣}$

(٣) $\text{ل} - \text{م} = \pm \frac{\sqrt{\text{ب}^{٢} - ٤\,\text{أ}\,\text{ح}}}{\text{أ}}$

$= \pm \frac{\sqrt{٢٥ - ٤ \times ٣ \,(-٧)}}{٣}$

$= \pm \frac{\sqrt{٢٥ + ٨٤}}{٣}$

$= \pm \frac{\sqrt{١٠٩}}{٣}$

**مثال ٢**

أوجد قيمة أ ، ب إذا كان : ٢، ٣ هما جذرا المعادلة $\text{س}^{٢} + \text{أ}\text{س} + \text{ب} = ٠$

**الحل**

∵ ٣،٢ هما جذرا المعادلة

$٢ + ٣ = \frac{-\text{معامل س}}{\text{معامل س}^{٢}}$

$٥ = \frac{-\text{أ}}{١}$ ∴ أ = -٥

، ∵ حاصل ضرب الجذرين = $\frac{\text{الحد المطلق}}{\text{معامل س}^{٢}}$

$٢ \times ٣ = \frac{\text{ب}}{١}$

∴ $٦ = \frac{\text{ب}}{١}$

∴ ب = ٦

**مثال ٣**

إذا كان مجموع جذرى المعادلة التربيعية : $٢\text{س}^{٢} + \text{ب}\text{س} + \text{ح} = ٠$ هو $\frac{٥}{٢}$

أوجد قيمة ب

**الحل**

∵ مجموع الجذرين = $\frac{-\text{ب}}{\text{أ}}$

∴ $\frac{٥}{٢} = \frac{-\text{ب}}{٢}$

∴ ٥ = -ب

∴ ب = -٥

## مثال ٤

أوجد مجموع الجذرين وحاصل ضربهما لكل من المعادلات الآتية

( ١ ) س ( س-٣ ) =٤

( ٢ ) ( ٢س+١ ) ( س - ٥ ) =٣

## الحل

(١) س ( س-٣ ) =٤ بوضع المعادلة على الصورة العامة

∴ $س^{٢}$-٣س=٤

∴ $س^{٢}$-٣س-٤=٠

∴ أ=١ ، ب =-٣ ، حـ= -١

∴ مجموع الجذرين = $\frac{٣}{١}$ = ٣

حاصل ضرب الجذرين = $\frac{حـ}{أ}$ = $\frac{-١}{١}$ = -١

---

( ٢ ) ( ٢س+١ ) ( س-٥ ) =٣

بوضع المعادلة على الصورة العامة

∴ ٢س ( س-٥ ) + ١ × ( س-٥ ) =٣

∴ $٢س^{٢}$ - ١٠س + س - ٥ = ٣

∴ $٢س^{٢}$-٩س-٨=٠

∵ أ= ٢ ، ب =-٩ ، حـ=-٨

∴ مجموع الجذرين = $\frac{-ب}{أ}$ = $\frac{٩}{٢}$

، حاصل ضرب الجذرين = $\frac{حـ}{أ}$ = $\frac{-٨}{٢}$ = -٤

## مثال ٥

ل ، م هما جذرا المعادلة $٢س^{٢}$-٦س+ حـ = ٠ فأوجد قيمة حـ التى تجعل : ل-م = ٧

## الحل

∵ ل ، م هما جذرا المعادلة

ل+م = $\frac{٦}{٢}$ =٣ ← (١)

∴ ل م= $\frac{حـ}{٢}$ ← (٢)

، ∵ ل-م = ٧ ← (٣)

بجمع المعادلتين (١) ، (٣) ينتج أن

٢ل= ١٠ ∴ ل= ٥

بالتعويض فى (١)

∴ ٥+م =-٣ ← م = -٨

بالتعويض فى (٣)

∴ ٥ × (-٨)= $\frac{حـ}{٢}$

∴ -٤٠ =$\frac{حـ}{٢}$

∴ حـ= -٨٠

## ملحوظة

في المعادلة التربيعية: $أ س^2 + ب س + حـ = ٠$ التي معاملات حدودها حقيقية إذا كان أحد الجذرين عدد مركب غير حقيقي فإن الجذر الآخر يكون عدد مركب مرافق له

## مثال ٦

إذا كان $(1+\sqrt{2}\,ت)$ هو أحد جذري المعادلة $س^2 - 2س + حـ = ٠$ حيث $حـ \in ح$

أوجد

(١) قيمة الجذر الآخر (٢) قيمة: حـ

## الحل

∵ المعاملات حقيقية وأحد الجذرين عدد مركب غير حقيقي

∴ الجذر الآخر مرافق له

∴ الجذر الآخر هو $(1-\sqrt{2}\,ت)$

∴ $(1-\sqrt{2}\,ت)$ ، $(1+\sqrt{2}\,ت)$ هما جذرا المعادلة

∵ حاصل ضرب الجذرين = $\frac{حـ}{أ}$

∴ $(1-\sqrt{2}\,ت)(1+\sqrt{2}\,ت) = \frac{حـ}{1}$

∴ $1 + 2 = حـ$

∴ $حـ = 3$

## حل آخر

∵ $أ = 1$ ، $ب = -2$ ، $ج = حـ$

نفرض أن الجذر الآخر هو ل

∴ ل ، $(1+\sqrt{2}\,ت)$ هما جذرا المعادلة

∵ مجموع الجذرين = $\frac{-ب}{أ}$

∴ $ل + 1 + \sqrt{2}\,ت = 2$

∴ $ل = 2 - 1 - \sqrt{2}\,ت = 1 - \sqrt{2}\,ت$

∴ الجذران هما $1 - \sqrt{2}\,ت$ ، $1 + \sqrt{2}\,ت$

∵ حاصل ضرب الجذرين = $\frac{حـ}{أ}$

∴ $(1-\sqrt{2}\,ت)(1+\sqrt{2}\,ت) = \frac{حـ}{1}$

∴ $1 + 2$

∴ $حـ = 3$

## ملاحظات مهمة

(١) في المعادلة التربيعية: $أ س^2 + ب س + حـ = ٠$

إذا كان: $أ = 1$

فإن: مجموع الجذرين = $-ب$

، حاصل ضرب الجذرين = حـ

في المعادلة: $س^2 - 6س + 5 = ٠$

مجموع الجذرين = ٦

، حاصل ضرب الجذرين = ٥

(٢) فى المعادلة التربيعية أس$^٢$ + ب س + حـ = ٠

إذا كان أحد جذرى المعادلة معكوس جمعى للآخر فإن : فإن مجموع الجذرين = صفر

∴ $\frac{-ب}{أ}$ = ٠ ∴ ب = ٠

(حيث ب معامل س)

---

(٣) فى المعادلة التربيعية أس$^٢$ + ب س + حـ = ٠

إذا كان أحد جذرى المعادلة معكوس ضربي للآخر فإن : حاصل ضرب الجذرين = ١

∴ $\frac{حـ}{أ}$ = ١ ∴ حـ = أ

---

## مثال (٧)

أوجد قيمة ك التى تجعل أحد جذرى المعادلة

٣س$^٢$ - (ك - ٢) س + (ك + ٤) = ٠

معكوس ضربي للجذر الآخر

## الحل

أحد جذرى المعادلة معكوس ضربي للآخر

فإن : حاصل ضرب الجذرين = ١

∴ $\frac{حـ}{أ}$ = ١ ∴ حـ = أ

، حـ = ك + ٤ ، أ = ٣

∴ ك + ٤ = ٣

ك = ٣ - ٤

∴ ك = - ١

(٤) إذا كانت النسبة بين جذرى المعادلة ٢ : ٣

نفرض أن الجذرين هما : ٢ل ، ٣ل

---

## مثال (٨)

إذا كانت النسبة بين جذرى المعادلة :

٨س$^٢$ - ب س + ٣ = ٠ هى ٢ : ٣

والجذرين موجبين أوجد قيمة ب

## الحل

نفرض أن الجذرين هما ٢ل ، ٣ل

مجموع الجذرين = $\frac{- معامل س}{معامل س^٢}$

٢ل + ٣ل = $\frac{ب}{٨}$

∴ ٥ل = $\frac{ب}{٨}$

∴ ب = ٤٠ل ← (١)

، حاصل ضرب الجذرين = $\frac{حـ}{أ}$

∴ ٢ل × ٣ل = $\frac{٣}{٨}$

∴ ٦ل$^٢$ = $\frac{٣}{٨}$

∴ ل$^٢$ = $\frac{٣}{٨}$ × $\frac{١}{٦}$ = $\frac{١}{١٦}$

∴ ل = ± $\frac{١}{٤}$ ← (٢)

بالتعويض من (٢) فى (١)

عند ل = $\frac{١}{٤}$

∴ $ب = ٤٠ \times \frac{١}{٤} = ١٠$

عند $ل = -\frac{١}{٤}$ مرفوض (لأن الجذرين موجبين)

## مثال ٩

إذا كانت النسبة بين جذرى المعادلة :

$أ س^٢ + ب س + حـ = ٠$ كنسبة ٢ : ٣ أثبت أن

$٢٥ أ حـ = ٦ ب^٢$

## الحل

نفرض أن الجذرين هما ٢ ل ، ٣ ل

مجموع الجذرين $= \frac{-\text{معامل } س}{\text{معامل } س^٢}$

∴ $٢ ل + ٣ ل = \frac{-ب}{أ}$

∴ $٥ ل = \frac{-ب}{أ}$

∴ $ل = \frac{-ب}{٥ أ}$ ← (١)

، ∵ حاصل ضرب الجذرين $= \frac{حـ}{أ}$

∴ $٢ ل \times ٣ ل = \frac{حـ}{أ}$

∴ $٦ ل^٢ = \frac{حـ}{أ}$ ← (٢)

بالتعويض من (١) فى (٢)

∴ $٦ (\frac{-ب}{٥ أ})^٢ = \frac{حـ}{أ}$

∴ $٦ \times \frac{ب^٢}{٢٥ أ^٢} = \frac{حـ}{أ}$

∴ $٦ ب^٢ = ٢٥ أ^٢ \times \frac{حـ}{أ}$

∴ $٦ ب^٢ = ٢٥ أ حـ$

## مثال ١٠

أوجد قيمة م التى تجعل أحد جذرى المعادلة

$٤ س^٢ - م س + ٧ = ٠$ يزيد عن الجذر الآخر بمقدار ٣

## الحل

$أ = ٤$ ، $ب = -م$ ، $حـ = ٧$

نفرض أن الجذرين هما : ل ، ل + ٣

، مجموع الجذرين $= \frac{-ب}{أ}$

∴ $ل + ل + ٣ = \frac{م}{٤}$

$٢ل + ٣ = \frac{م}{٤}$ بالضرب × ٤ للطرفين

∴ $م = ٨ل + ١٢$ ← (١)

، ∵ حاصل ضرب الجذرين $= \frac{حـ}{أ}$

∴ $ل (ل + ٣) = \frac{٧}{٤}$

∴ $ل^٢ + ٣ل - \frac{٧}{٤} = ٠$ بالضرب × ٤ للطرفين

∴ $٤ل^٢ + ١٢ل - ٧ = ٠$

$(٢ل - ١)(٢ل + ٧) = ٠$

إما $٢ل - ١ = ٠$ ∴ $ل = \frac{١}{٢}$

او $٢ل + ٧ = ٠$ ∴ $ل = \frac{-٧}{٢}$

بالتعويض فى (١)

عند $ل = \frac{١}{٢}$

$م = ٨ \times \frac{١}{٢} + ١٢ = ٤ + ١٢$

∴ $م = ١٦$

عند $ل = \frac{-٧}{٢}$

$م = ٨ \times \frac{-٧}{٢} + ١٢ = -٢٨ + ١٢$ ∴ $م = -١٦$

∴ $م = \pm ١٦$

=================================

## مثال (١١)

أوجد قيمة $أ$ التى تجعل مجموع جذرى المعادلة : $س^٢ - (أ + ٢)س + ٦ = ٠$ يساوى حاصل ضرب جذرى المعادلة $س^٢ + ٥س + أ^٢ = ٠$

### الحل

∵ مجموع جذرى المعادلة الاولى $= \frac{أ + ٢}{١}$

$= أ + ٢$

، ∵ حاصل ضرب جذرى المعادلة الثاني $= \frac{أ^٢}{١}$

∴ $أ^٢ = أ + ٢$

∴ $أ^٢ - أ - ٢ = ٠$

$(أ + ١)(أ - ٢) = ٠$

∴ $أ = -١$ أو $أ = ٢$

=================================

## مثال (١٢)

أوجد الشرط اللازم ليكى يكون أحد جذرى المعادلة

$أس^٢ + ب س + حـ = ٠$

مساويا ضعف الجذر الآخر

### الحل

∵ أحد الجذرين ضعف الجذر الآخر

∴ نفرض أن الجذرين هما : ل ، ٢ل

∵ مجموع الجذرين $= \frac{-ب}{أ}$

∴ $ل + ٢ل = \frac{-ب}{أ}$

∴ $٣ل = \frac{-ب}{أ}$

∴ $ل = \frac{-ب}{٣أ}$ ← (١)

حاصل ضرب الجذرين $= \frac{حـ}{أ}$

∴ $ل \times ٢ل = \frac{حـ}{أ}$

∴ $٢ل^٢ = \frac{حـ}{أ}$ ← (٢)

بالتعويض من (١) فى (٢)

$٢\left(\frac{-ب}{٣أ}\right)^٢ = \frac{حـ}{أ}$

∴ $٢\left(\frac{ب^٢}{٩أ^٢}\right) = \frac{حـ}{أ}$

بالضرب فى $٩أ^٢$ للطرفين

∴ $٢ب^٢ = \frac{حـ}{أ} \times ٩أ^٢$

∴ $٢ب^٢ = ٩أحـ$

وهذا هو الشرط اللازم لكى يكون أحدجذرى المعادلة: $أس^٢ + ب س + حـ = ٠$ ضعف الجذر الآخر

# تكوين المعادلة التربيعية متى علم جذراها

إذا كان ل ، م هما جذرا معادلة تربيعية فإن المعادلة هي :

$س^2 - (ل + م)س + ل م = 0$

**$س^2$ -(مجموع الجذرين )س+حاصل ضربهما = ٠**

==================================

## مثال ١

(١) ٥ ، ٣

(٢) $٢+\sqrt{٣}$ ، $٢ - \sqrt{٣}$

(٣) $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٣}{٢}$

(٤) $\frac{-٢+٢ت}{١+ت}$ ، $\frac{-٣+٤ت}{٢-ت}$

## الحل

(١) مجموع الجذرين = ٥+٣ = ٨

، حاصل ضرب الجذرين = ٥×٣ =١٥

المعادلة هي : $س^2 - ٨س + ١٥ = ٠$.

---

(٢) مجموع الجذرين = $٢+\sqrt{٣} + ٢ - \sqrt{٣}$ = ٤

وحاصل ضرب الجذرين = $(٢+\sqrt{٣})(٢-\sqrt{٣})$

= ٤ - ٣ = ١

∴ المعادلة هي : $س^2 - ٤س + ١ = ٠$

---

(٣) مجموع الجذرين = $\frac{٢}{٣} + \frac{٣}{٢} = \frac{٤+٩}{٦} = \frac{١٣}{٦}$

، حاصل ضرب الجذرين = $\frac{٢}{٣} \times \frac{٣}{٢} = ١$

∴ المعادلة هي $س^2 - \frac{١٣}{٦}س + ١ = ٠$

بالضرب × ٦ للطرفين

∴ $٦س^2 - ١٣س + ٦ = ٠$

---

(٤) بفرض أن جذري المعادلة هما ل ، م

، ل = $\frac{-٢+٢ت}{١+ت}$ بالضرب × مرافق المقام بسطاً ومقاماً

∴ ل = $\frac{-٢+٢ت}{١+ت} \times \frac{١-ت}{١-ت}$

= $\frac{-٢+٢ت+٢ت+٢}{١+١} = \frac{٤ت}{٢} = ٢ت$

، م = $\frac{-٣+٤ت}{٢-ت}$ بالضرب × مرافق المقام بسطا ومقاما

∴ م = $\frac{-٣+٤ت}{٢-ت} \times \frac{٢+ت}{٢+ت} = \frac{-٦-٣ت+٨ت+٤ت^2}{٤+١}$

= $\frac{-١٠+٥ت}{٥}$ = -٢+ت

مجموع الجذرين = ٢ت + (-٢ت) = صفر

، حاصل ضرب الجذرين = ٢ت × (-٢ت)

= $-٤ت^2$ = ٤

∴ المعادلة هي : $س^2 + ٤ = ٠$

==================================

## بعض العلاقات المهمة

(١) $ل^2 + م^2 = (ل+م)^2 - 2ل م$

(٢) $(ل-م)^2 = (ل+م)^2 - 4ل م$

(٣) $ل^3 + م^3 = (ل+م)[(ل+م)^2 - 3ل م]$

(٤) $ل^3 - م^3 = (ل-م)[(ل+م)^2 - ل م]$

(٥) $\frac{1}{ل} + \frac{1}{م} = \frac{ل+م}{ل م}$

(٦) $\frac{ل}{م} + \frac{م}{ل} = \frac{ل^2+م^2}{ل م} = \frac{(ل+م)^2 - 2ل م}{ل م}$

(٧) $ل - م = \pm \frac{\sqrt{ب^2 - 4أ ج}}{أ}$

$= \pm \sqrt{(ل+م)^2 - 4ل م}$

### مثال ٢

إذا كان ل ،م هما جذرا المعادلة

$س^2 - 5س + 2 = 0$ فأوجد قيمة المقادير الآتية

(١) $ل^2 + م^2$ (٢) $ل - م$

(٣) $ل^3 + م^3$ (٤) $\frac{ل}{م} + \frac{م}{ل}$

(٥) $\frac{1}{ل} + \frac{1}{م}$ (٦) $ل^2 - 5ل + 9$

(٧) $2ل^2 - 5ل + م^2 + 2$ (٨) $م^2 - 4م + ل + 3$

### الحل

∵ ل ،م هما جذرا المعادلة $س^2 - 5س + 2 = 0$

∴ $ل + م = 5$ ، $ل م = 2$

---

∵ ل ،م هما جذرا المعادلة $س^2 - 5س + 2 = 0$

∴ $ل + م = 5$ ، $ل م = 2$

(١) ∵ $ل^2 + م^2 = (ل+م)^2 - 2ل م$

$= (5)^2 - 2 \times 2 = 25 - 4 = 21$

(٢) $ل - م = \pm \sqrt{(ل+م)^2 - 4ل م}$

$= \sqrt{(5)^2 - 4 \times 2}$

$= \pm \sqrt{25 - 8} = \pm \sqrt{17}$

(٣) $ل^3 + م^3 = (ل+م)[(ل+م)^2 - 3ل م]$

$= 5 \times [(5)^2 - 3 \times 2]$

$= 5[25 - 6] = 5 \times 19 = 95$

(٤) ∵ $\frac{ل}{م} + \frac{م}{ل} = \frac{ل^2+م^2}{ل م}$

$= \frac{(ل+م)^2 - 2ل م}{ل م}$

$= \frac{(5)^2 - 2 \times 2}{2}$

$= \frac{25 - 4}{2} = \frac{21}{2}$

(٥) ∵ $\frac{1}{ل} + \frac{1}{م} = \frac{ل+م}{ل م}$

$= \frac{5}{2}$

(٦) ∵ ل جذر للمعادلة:

$س^2 - 5س + 2 = 0$ ∴ يحقق تساوى طرفيها

∴ $ل^2 - 5ل + 2 = 0$

∴ $ل^2 - 5ل = -2$

∴ المقدار $= (ل^2 - 5ل) + 9$

$= (-2) + 9 = 7$

(٧) ∵ المقدار = ٢ ل$^{٢}$ - ٥ ل + م$^{٢}$ + ٢

∴ المقدار = ل$^{٢}$ + ل$^{٢}$ - ٥ ل + م$^{٢}$ + ٢

= ( ل$^{٢}$ + م$^{٢}$ ) + ( ل$^{٢}$ - ٥ ل ) + ٢

= ( ل + م )$^{٢}$ - ٢ ل م + ( ل$^{٢}$ - ٥ ل ) + ٢

= (٥)$^{٢}$ - ٢ × ٢ + (-٢) + ٢

= ٢٥ - ٤ - ٤ = ٢٥ - ٨ = ١٧

---

(٨) ∵ المقدار = م$^{٢}$ - ٤ م + ل + ٣

بإضافة : م ، - م للمقدار

المقدار = م$^{٢}$ - ٤ م + م - م + ل + ٣

= م$^{٢}$ - ٥ م + ( م + ل ) + ٣

= -٢ + ٥ + ٣ = ٦

---

## مثال ٣

إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة :

س$^{٢}$ + ٣ س - ٢ = ٠

فكون المعادلة التي جذراها : ل$^{٢}$ ، م$^{٢}$

## الحل

∵ ل ، م هما جذرا المعادلة المعطاة

∴ ل + م = -٣

، ل م = -٢

∴ مجموع جذري المعادلة المطلوبة = ل$^{٢}$ + م$^{٢}$

= ( ل + م )$^{٢}$ - ٢ ل م

= (-٣)$^{٢}$ - ٢ × (-٢)

= ٩ + ٤ = ١٣

، ∵ حاصل ضرب جذري المعادلة

المطلوبة = ل$^{٢}$ م$^{٢}$ = ( ل م )$^{٢}$ = ( -٢ )$^{٢}$ = ٤

∴ المعادلة المطلوبة هي :

س$^{٢}$ - ( ١٣ ) س + ( ٤ ) = ٠

س$^{٢}$ - ١٣ س + ٤ = ٠

---

## مثال ٤

إذا كان ل ، م هما جذرا المعادلة

س$^{٢}$ - ٦ س + ٨ = ٠

فكون المعادلة التي جذراها : ل + ١ ، م + ١

## الحل

من المعادلة المعطاة :

∵ مجموع الجذرين = $\frac{-ب}{أ}$

∴ ل + م = $\frac{-ب}{أ}$

∴ ل + م = ٦

، حاصل ضرب الجذرين ( ل م ) = $\frac{جـ}{أ}$

∴ ل م = ٨

∵ جذرا المعادلة المطلوبة هما ل + ١ ، م + ١

∴ مجموع الجذرين = ( ل + ١ ) + ( م + ١ )

= ل + م + ٢

= ٦ + ٢ = ٨

، ∵ حاصل ضرب الجذرين = ( ل + ١ ) ( م + ١ )

= ل م + ل + م + ١

= ٨ + ٦ + ١ = ١٥

∴ المعادلة هي : س$^{٢}$ - ٨ س + ١٥ = ٠

## مثال (٥)

إذا كان ل+٢ ، م +٢ هما جذرا المعادلة : $س^{٢}$ - ١١س + ٣ = ٠

فكون المعادلة التى جذراها : ل ، م

### الحل

أ = ١ ، ب = -١١ ، حـ = ٣

∵ جذرى المعادلة المعطاة هما : ل+٢ ، م+٢

، مجموع الجذرين = $\frac{-ب}{أ}$

∵ ل+٢ + م + ٢ = ١١

∴ ل + م + ٤ = ١١

∴ ل+م = ٧ ← (١)

، حاصل ضرب الجذرين = $\frac{حـ}{أ}$

∴ (ل+٢)(م+٢) = ٣

∴ ل م + ٢ل + ٢م + ٤ = ٣

∴ ل م + ٢(ل+م) = -١ ← (٢)

بالتعويض من (١) فى (٢)

∴ ل م + ٢(٧) = -١

∴ ل م + ١٤ = -١

∴ ل م = -١٥ ← (٣)

∵ المعادلة المطلوبة جذراها : ل ، م

∴ مجموع الجذرين = ل + م = ٧

∴ حاصل ضرب الجذرين = ل م = -١٥

∴ المعادلة المطلوبة هى

$س^{٢}$ - (٧)س + (-١٥) = ٠

$س^{٢}$ - ٧س - ١٥ = ٠

## مثال (٦)

إذا كان الفرق بين جذرى المعادلة

$٢س^{٢}$ - ٩س + ٤ + ك = ٠ هو $\frac{٣}{٢}$

فأوجد قيمة : ك

### الحل

بفرض أن جذرى المعادلة المعطاة هما ل، م

∴ ل + م = $\frac{٩}{٢}$

، ل م = $\frac{٤+ك}{٢}$

∵ ل - م = $\frac{٣}{٢}$ بالتربيع للطرفين

$(ل-م)^{٢}$ = $\frac{٩}{٤}$

∴ $(ل+م)^{٢}$ - ٤ل م = $\frac{٩}{٤}$

$(\frac{٩}{٢})^{٢}$ - ٤($\frac{٤+ك}{٢}$) = $\frac{٩}{٤}$

$\frac{٨١}{٤}$ - ٢(٤+ك) = $\frac{٩}{٤}$ بالضرب × ٤

٨١ - ٨(٤+ك) = ٩

٨١ - ٣٢ - ٨ك = ٩

٤٩ - ٨ك = ٩

٨ك = ٤٩ - ٩

٨ك = ٤٠

∴ ك = ٥

### حل آخر

أ = ٢ ، ب = -٩ ، حـ = ٤ + ك

∵ ل - م = ± $\frac{\sqrt{ب^{٢} - ٤أحـ}}{أ}$

، ل - م = $\frac{٣}{٢}$

$\therefore \frac{٣}{٢} = \pm \frac{\sqrt{(-٩)^{٢} - ٤ \times ٢ \times (٤ + \text{ك})}}{٢}$

بالضرب × ٢ للطرفين

$\therefore ٣ = \pm \sqrt{(-٩)^{٢} - ٤ \times ٢ \times (٤ + \text{ك})}$

$\therefore ٣ \pm \sqrt{٨١ - ٣٢ - ٨\text{ك}}$

$\therefore ٣ = \pm \sqrt{٤٩ - ٨\text{ك}}$ بالتربيع للطرفين

$\therefore ٩ = ٤٩ - ٨\text{ك}$

$\therefore ٨\text{ك} = ٤٩ - ٩$

$\therefore ٨\text{ك} = ٤٠$

$\therefore \text{ك} = ٥$

==================

## مثال ٧

إذا كان ل، م هما جذرا المعادلة $\text{س}^{٢} - ٣\text{س} - ١ = ٠$

كون المعادلة التى جذراها $\frac{١}{\text{ل}^{٢}}$ ، $\frac{١}{\text{م}^{٢}}$

## الحل

من المعادلة المعطاة :

$\because$ مجموع الجذرين = $\frac{-\text{ب}}{\text{أ}}$

$\therefore \text{ل} + \text{م} = ٣$

، حاصل ضرب الجذرين = $\frac{\text{جـ}}{\text{أ}}$

$\therefore \text{ل م} = -١$

$\because$ المعادلة المطلوبة جذراها : $\frac{١}{\text{ل}^{٢}}$ ، $\frac{١}{\text{م}^{٢}}$

مجموع الجذرين = $\frac{١}{\text{ل}^{٢}} + \frac{١}{\text{م}^{٢}}$

$= \frac{\text{ل}^{٢} + \text{م}^{٢}}{\text{ل}^{٢}\ \text{م}^{٢}}$

$= \frac{(\text{ل} + \text{م})^{٢} - ٢\text{ل م}}{(\text{ل م})^{٢}}$

$= \frac{(٣)^{٢} - ٢(-١)}{(-١)^{٢}}$

$= ٩ + ٢ = ١١$

، حاصل ضرب الجذرين = $\frac{١}{\text{ل}^{٢}} \times \frac{١}{\text{م}^{٢}}$

$= \frac{١}{(\text{ل م})^{٢}}$

$= \frac{١}{(-١)^{٢}} = ١$

$\therefore$ المعادلة هى : $\text{س}^{٢} - ١١\text{س} + ١ = ٠$

==================

## مثال ٨

كون المعادلة التربيعية التى يزيد كل من جذريها بمقدار ١ عن جذرى المعادلة $\text{س}^{٢} - ٧\text{س} - ٩ = ٠$

## الحل

نفرض أن جذرى المعادلة المعطاة هما : ل ، م

$\therefore \text{ل} + \text{م} = ٧$ ، $\text{ل م} = -٩$

$\therefore$ جذرا المعادلة المطلوبة هما

$\text{ل} + ١$ ، $\text{م} + ١$

$\therefore$ مجموع الجذرين = $\text{ل} + ١ + \text{م} + ١$

$= \text{ل} + \text{م} + ٢$

$= ٧ + ٢ = ٩$





، حاصل ضرب الجذرين = (ل + ١) (م + ١)

= ل م + ل + م + ١

= (-٩) + ٧ + ١ = -١

∴ المعادلة هى : س$^{٢}$ - ٩س - ١ = ٠

## مثال ٩

إذا كان : ل، م هما جذرى المعادلة

س$^{٢}$ - ٢س - ٨ = ٠ وكان ل > م

كون المعادلة التى جذراها : ل-١ ، م+ ٣

### الحل

نوجد جذرى المعادلة المعطاة :

س$^{٢}$ - ٢س - ٨ = ٠

(س+٢)(س-٤) = ٠

إما س + ٢ = ٠ ∴ س = -٢ | أو س - ٤ = ٠ س = ٤

∵ ل > م

∴ ل = ٤ ، م = -٢

∴ المعادلة المطلوبة جذراها : ل-١ ، م+٣

∴ مجموع الجذرين = ل - ١ + م + ٣

= ل + م + ٢

= ٤ - ٢ + ٢ = ٤

، حاصل ضرب الجذرين = (ل - ١)(م + ٣)

= (٤ - ١)(-٢ + ٣) = ٣ × ١ = ٣

∴ المعادلة هى : س$^{٢}$ - ٤س + ٣ = ٠

## مثال ١٠

إذا كان ل، م هما جذرا المعادلة :

٤س$^{٢}$ - ٣س + أ = ٠

وكان: ل$^{٢}$ + م$^{٢}$ = ٣ ل م فأوجد قيمة أ

### الحل

∵ ل، م هما جذرا المعادلة

، ل + م = $\frac{-ب}{أ}$

∴ ل + م = $\frac{٢}{٤}$ = $\frac{١}{٢}$

، ل م = $\frac{جـ}{أ}$

∴ ل م = $\frac{أ}{٤}$

∵ ل$^{٢}$ + م$^{٢}$ = ٣ ل م

∴ (ل + م)$^{٢}$ - ٢ ل م = ٣ ل م

∴ (ل + م)$^{٢}$ = ٥ ل م

($\frac{١}{٢}$)$^{٢}$ = ٥ × $\frac{أ}{٤}$

$\frac{١}{٤}$ = $\frac{٥أ}{٤}$

∴ ٥ أ = ١

∴ أ = $\frac{١}{٥}$

## مثال ١١

إذا كان ل، م هما جذرا المعادلة :

س$^{٢}$ - ٣س + ٦ = ٠ كون المعادلة التى جذراها

ل + م ، ل م

### الحل

**الحل**

∵ ل، م هما جذرا المعادلة

، ل + م = $\frac{-ب}{أ}$ ∴ ل + م = ٢

، ل م = $\frac{جـ}{أ}$ ∴ ل م = ٦

، ∵ جذرا المعادلة المطلوبة هما ل + م ، ل م

∴ مجموع الجذرين = ل + م + ل م

= ٢ + ٦ = ٨

،∵ حاصل ضرب الجذرين = ( ل + م ) ( ل م )

= ٦ × ٢ = ١٢

∴ المعادلة هى : س٢ - ٨ س + ١٢ = ٠

**مثال ١٢**

إذا كان : $\frac{٢}{ل}$ ، $\frac{٢}{م}$ هما جذرا المعادلة

س٢ - ٦ س + ٤ = ٠

فأوجد المعادلة التى جذراها : ل ، م

**الحل**

∵ $\frac{٢}{ل}$ ، $\frac{٢}{م}$ هما جذرا المعادلة المعطاة

∴ $\frac{٢}{ل}$ × $\frac{٢}{م}$ = ٤

∴ $\frac{٤}{ل م}$ = ٤ ∴ ل م = ١

، $\frac{٢}{ل}$ + $\frac{٢}{م}$ = ٦

∴ $\frac{٢ ل + ٢ م}{ل م}$ = ٦ ، ∵ ل م = ١

∴ $\frac{٢ ( ل + م )}{١}$ = ٦ بالقسمة على ٢ للطرفين

ل + م = ٣

، ∵ ل ، م هما جذرا المعادلة المطلوبة

∴ ل + م = ٣

، ل م = ١

∴ المعادلة هى

س٢ - ٣ س + ١ = ٠





# إشارة الدالة

إذا كانت : ص = د( س )

فإنه يقصد بإشارة الدالة قيم س التى تجعل

( ١ ) د( س ) موجبة

( ٢ ) د( س ) سالبة

( ٣ ) د( س ) = صفر

## أولاً : إشارة الدالة الثابتة

إذا كانت : د( س ) = أ حيث أ ∈ ح ، أ ≠ ٠

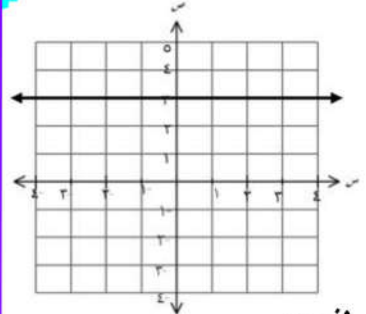
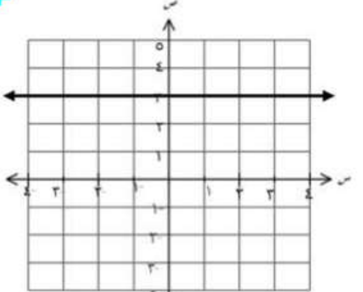
فإن إشارة الدالة هى نفس إشارة أ لجميع قيم س الحقيقية

(١) إشارة الدالة د : د( س ) = ٥ تكون ......فى ....

(٢) إشارة الدالة د: د( س ) = -٢ تكون ......فى ...

(٣) الدالة د: د(س) = $(٣)^{-٢}$ تكون ....فى الفترة ....

(٤) الشكل المقابل

يمثل الدالة د :

د(س) = ........

وإشارة الدالة تكون ....فى ح

(٥) الشكل المقابل

يمثل الدالة د :

د(س) = ........

وإشارة الدالة تكون ....فى ح

## ملاحظات مهمة

( ١ ) فى الفترة التى يقع فيها منحنى الدالة أعلى محور السينات تكون الدالة موجبة فى هذه الفترة

( ٢ ) إذا كان : منحنى الدالة يقطع محور السينات فى ( أ، ٠ ) ، ( ب، ٠ ) فإن :

د( س ) = ٠ عندما س ∈ { أ، ب }

(٣) فى الفترة التى يكون فيها منحنى الدالة يقع أسفل محور السينات تكون الدالة سالبة فى هذه الفترة

## فمثلاً

فى الشكل المقابل :

( ١ ) منحنى الدالة يقع فوق محور السينات فى الفترة :

] ٣، ∞ [ ، ] -∞ ، -١ [

∴ الدالة موجبة فى ] ٣، ∞ [ ، ] -∞ ، -١ [

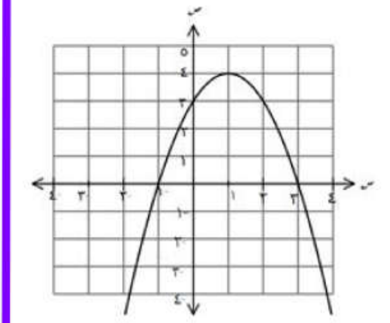
( ٢ ) منحنى الدالة يقطع محور السينات فى ( ٣، ٠ ) ، ( -١، ٠ )

∴ د ( س ) = ٠ عندما س ∈ { ٣، -١ }

(٣) منحنى الدالة يقع أسفل محور السينات فى الفترة : ] -١، ٣ [

∴ الدالة تكون سالبة فى الفترة ] -١، ٣ [

## مثــــال ١



الشكل المقابل يمثل منحنى دالة أكمل ما يأتى

(١) د(س) > ٠ فى ..............

(٢) د(س) < ٠ فى ......... ، ...........

(٣) د(س) = ٠ فى الفترة ....................

====================

## ثانياً : إشارة الدالة الخطية

الدالة د : د(س) = أس + ب

= أ(س + $\frac{ب}{أ}$)

تكون

١) د(س) = ٠ عندما س = $\frac{-ب}{أ}$

(٢) د(س) لها نفس إشارة أ عندماس > $\frac{-ب}{أ}$

(٣) د(س) تخالف اشارة ا عندما س < $\frac{-ب}{أ}$

## مثــــال ٢

ابحث إشارة الدالة د : د(س) = ٣س-٢

## الحــــل

بوضع د(س) = ٠

∴ ٣س-٢ = ٠

∴ ٣س = ٢

∴ س = $\frac{٢}{٣}$

(١) د(س) = ٠ عندما س = $\frac{٢}{٣}$

(٢) د(س) > ٠ عندما س ∈ ]$\frac{٢}{٣}$ ، ∞[

(٣) د(س) < ٠ عندما س ∈ ]∞ ، $\frac{٢}{٣}$[

====================

## مثــــال ٣

عين إشارة الدالة د : د(س) = ٦-٢س

## الحــــل

بوضع د(س) = ٠

∴ ٦-٢س = ٠

∴ ٦ = ٢س

∴ س = ٣

(١) د(س) = ٠ عندما س = ٣

(٢) د(س) < ٠ عندما س ∈ ]٣ ، ∞[

(٣) د(س) > ٠ عندما س ∈ ]∞ ، ٣[

====================

## ثالثاً : إشارة الدالة التربيعية

لبحث إشارة الدالة التربيعية د :

د(س) = أس٢ + ب س + حـ

نوجد المميز = ب٢ - ٤ أ حـ

وتوجد ثلاث حالات

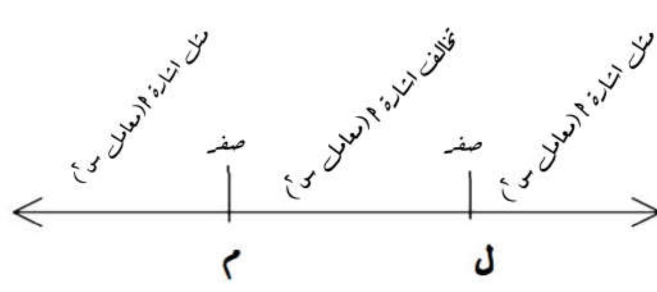
**(١) إذا كان المميز > ٠**

∴ للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان

نوجد هذين الجذرين ( بالتحليل – القانون العام – بالحاسبة ) وليكن :

س = ل ، س = م هما الجذران فإن

حيث ل > م




(١) د(س) = ٠ عندما س ∈ {ل، م}

(٢) د(س) تخالف إشارة أ عندما
س ∈ ]ل ، م[

(٣) د(س) لها نفس إشارة أ
عندما س ∈ ]ل ، ∞[ ، ]-∞ ، م[

أي عندما س ∈ ح - [ل ، م]

## مثال ٤

ابحث إشارة الدالة د : د(س) = س$^{٢}$ - ٥س + ٦

## الحل

بوضع د(س) = ٠

∴ س$^{٢}$ - ٥س + ٦ = ٠

∴ أ = ١ ، ب = -٥ ، جـ = ٦

المميز = ب$^{٢}$ - ٤ أ جـ

= (-٥)$^{٢}$ - ٤ × ١ × ٦ = ٢٥ - ٢٤ = ١ > ٠

∴ للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان نوجدهما بالتحليل

∴ (س - ٢)(س - ٣) = ٠

إما س - ٢ = ٠ | أو س - ٣ = ٠

∴ س = ٢ | س = ٣

د(س) : +++++ صفر ----- صفر +++++ (عند ٢ ، ٣ على محور س)

(١) د(س) = ٠ عندما س ∈ {٢، ٣}

(٢) د(س) < ٠ عندما س ∈ ]٢ ، ٣[

(٣) د(س) > ٠ عندما س ∈ ح - [٢ ، ٣]

## مثال ٥

ابحث إشارة الدالة د : د(س) = ٤ + ٣س - س$^{٢}$

## الحل

بوضع د(س) = ٠

∴ ٤ + ٣س - س$^{٢}$ = ٠

∴ أ = -١ ، ب = ٣ ، جـ = ٤

المميز = ب$^{٢}$ - ٤ أ جـ

= (٣)$^{٢}$ - ٤ × (-١) × ٤ = ٩ + ١٦ = ٢٥ > ٠

∴ للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان نوجدهما بالتحليل

(لأن المميز مربع كامل)

∵ ٤ + ٣س - س$^{٢}$ = ٠ بالضرب × (-١) للطرفين

∴ س$^{٢}$ - ٣س - ٤ = ٠

∴ (س - ٤)(س + ١) = ٠

إما س - ٤ = ٠ | أو س + ١ = ٠

∴ س = ٤ | س = -١

د(س) : ----- صفر +++++ صفر ----- (عند -١ ، ٤ على محور س)

(١) د(س) = ٠ عندما $\frac{-ب}{٢أ}$

(٢) د(س) > ٠ عندما س ∈ ]-١، ٤[

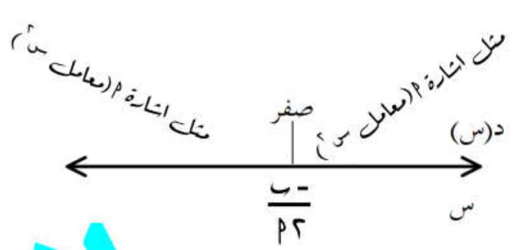
(٣) د(س) < ٠ عندما س ∈ ح - [-١، ٤]

---

## (٢) إذا كان المميز = ٠

∴ للمعادلة جذران حقيقيان

متساويان وكل منهما = $\frac{-ب}{٢أ}$




(١) د(س) = صفر عندما س = $\frac{-ب}{٢أ}$

(٢) د(س) لها نفس اشارة أ

عندما س ∈ ح - {$\frac{-ب}{٢أ}$}

**مثال ٦**

ابحث إشارة الدالة د: د(س) = س$^٢$ - ٦س + ٩

**الحل**

بوضع د(س) = ٠

∴ س$^٢$ - ٦س + ٩ = ٠

∴ أ = ١ ، ب = -٦ ، حـ = ٩

المميز = ب$^٢$ - ٤أحـ

= (-٦)$^٢$ - ٤ × ١ × ٩ = ٣٦ - ٣٦ = ٠

∴ للمعادلة جذران حقيقيان متساويان وكل منهما

س = $\frac{-ب}{٢أ}$ ∵ س = $\frac{٦}{٢ × ١}$ = ٣

د(س) + + + + + + صفر + + + + + +
٣ س

(١) د(س) = صفر عندما س = ٣

(٢) د(س) > ٠ عندما س ∈ ح - {٣}

---

## (٣) إذا كان المميز < ٠

∴ ليس للمعادلة جذور حقيقية

والدالة تكون

لها نفس إشارة أ لجميع قيم س الحقيقية

**مثال ٧**

ابحث إشارة الدالة د: د(س) = س$^٢$ - ٣س + ٩

**الحل**

بوضع د(س) = ٠

∴ س$^٢$ - ٣س + ٩ = ٠

∴ أ = ١ ، ب = -٣ ، حـ = ٩

المميز = ب$^٢$ - ٤أحـ

= (-٣)$^٢$ - ٤ × ١ × ٩ = ٩ - ٣٦ = -٢٧ < ٠

ليس للمعادلة جذور حقيقية

∴ الدالة لها نفس اشارة معامل س$^٢$

لجميع قيم س الحقيقية

، ∵ أ > ٠

∴ د(س) > ٠ عندما س > ٠

## مثال ٨

ابحث اشارة الدالة د :

د(س) = -س² + ٨س - ١٥ على الفترة [١ ، ٧]

### الحل

نضع : د(س) = ٠

∴ -س² + ٨س - ١٥ = ٠

∴ أ = -١ ، ب = ٨ ، حـ = -١٥

∵ المميز = ب² - ٤ أ حـ

= (٨)² - ٤×(-١)×(-١٥)

= ٦٤ - ٦٠ = ٤ > ٠

∴ للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان

∵ -س² + ٨س - ١٥ = ٠ بالضرب × (-١) للطرفين

ى س² - ٨س + ١٥ = ٠

∴ (س - ٥)(س - ٣) = ٠

إما س - ٥ = ٠ أو س - ٣ = ٠

∴ س = ٥ س = ٣

د(س) ---- | ++++ | ---- | (صفر عند ٣ ، ٥) — س : ١ ، ٣ ، ٥ ، ٧

(١) د(س) = ٠ عندما س ∈ {٣ ، ٥}

(٢) د(س) < ٠

عندما س ∈ [١ ، ٣[ أو س ∈ ]٥ ، ٧]

(٣) د(س) > ٠ عندما س ∈ ]٣ ، ٥[

## مثال ٩

إذا كانت :

د(س) = س² - ٦س + ٥ ، ر(س) = ٤س - س²

فعين الفترات التى تكون فيها الدالتين موجبتين معا

### الحل

نبحث اشارة الدالة د :

بوضع : س² - ٥س + ٦ = ٠

∴ (س - ٢)(س - ٣) = ٠

إما س - ٢ = ٠ أو س - ٣ = ٠

∴ س = ٢ س = ٣

د(س) +++++ | ----- | +++++ (صفر عند ٢ ، ٣) — س

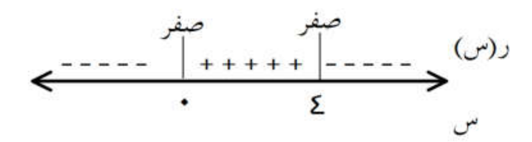
نبحث اشارة الدالة ر

بوضع : ٤س - س² = ٠

∴ س(٤ - س) = ٠

إما س = ٠ أو ٤ - س = ٠

∴ س = ٤




نبحث إشارة الدالتين على خط أعداد واحد

كما بالشكل :

د(س) ++++++ | ---- | ++++++++ (صفر عند ٢ ، ٣)

ر(س) ---- | ٠ +++++ ٢ ++++++ ٣ +++ ٤ | ---- (صفر عند ٠ ، ٤)

نلاحظ أن الدالتين موجبتين معا فى :

]٠ ، ٢[ ، ]٣ ، ٤[

# حل متباينة الدرجة الثانية في متغير واحد في ح

أ س$^2$ + ب س + حـ > ٠

١) نجعل أحد طرفي المتباينة = صفر

٢) نوجد الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة :

وهي د (س) = أ س$^2$ + ب س + حـ

٣) نبحث إشارة هذه الدالة

٤) نوجد قيم س التي تجعل المقدار :

أ س$^2$ + ب س + حـ موجبا

## مثال ١

أوجد في ح مجموعة حل المتباينة :

س$^2$ + ٤ > ٥

### الحل

١- بوضع المتباينة

أ س$^2$ + ب س + حـ > ٠

∴ س$^2$ - ٥س + ٤ > ٠

٢- الدالة التربيعية المرتبطة بالمتباينة هي

د (س) = س$^2$ - ٥س + ٤

٣- نبحث إشارة هذه الدالة

بوضع :

س$^2$ - ٥س + ٤ = ٠

(س - ٤) (س - ١) = ٠

إما س - ٤ = ٠ ∴ س = ٤ | أو س - ١ = ٠ س = ١

صفر صفر د(س)
- - - - - | + + + + + + | - - - - - -
١ ٤ س

∵ د (س) > ٠ عندما س ∈ ] ١ ، ٤ [

∴ م . ح = ] ١ ، ٤ [

## مثال ٢

أوجد في ح مجموعة حل المتباينة :

س$^2$ ≤ ٦س - ٩

### الحل

∵ س$^2$ - ٦س + ٩ ≤ ٠

بوضع د (س) = س$^2$ - ٦س + ٩

∴ أ = ١ ، ب = -٦ ، حـ = ٩

∵ المميز = ب$^2$ - ٤ أ حـ

= (-٦)$^2$ - ٤ × ١ × ٩ = ٣٦ - ٣٦ = ٠

∴ للمعادلة د (س) = ٠ جذران متساويان

وكل منهما : س = $\frac{-ب}{٢أ}$

س = $\frac{٦}{٢ × ١}$ = ٣

∴ د (س) > ٠ عندما س ∈ ح - {٣}

د (س) = ٠ عندما س = ٣

∴ د (س) ≤ ٠ عندما س ∈ ح

∴ مجموعة الحل = ح





## مثال (٣)

أوجد في ح مجموعة حل المتباينة

(س + ٣)^٢ ≥ ١٠ - ٣ (س + ٣)

## الحل

س^٢ + ٦س + ٩ ≥ ١٠ - ٣ - ٣س - ٩

س^٢ + ٦س + ٩ ≥ ١ - ٣س

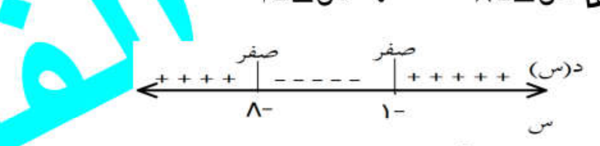
∴ س^٢ + ٩س + ٨ ≥ ٠

بوضع د(س) = س^٢ + ٩س + ٨

= (س + ٨) (س + ١)

∴ جذرا المعادلة د(س) = ٠

هما س = -٨ ، س = -١






القدار (س^٢ + ٩س + ٨) يكون أكبر من الصفر

س ∈ ح - [-٨ ، -١]

والمقدار = صفر عندما س ∈ {-٨ ، -١}

∴ م.ح = ح - [-٨ ، -١] ∪ {-٨ ، -١}

= ح - ]-٨ ، -١[

# سلسلة الفاروق







## للصف الأول الثانوي

### الفصل الدراسي الأول

إعداد : أ /عشري فاروق

ت/ ٠١١٥٦٢٤٤٤٣١

# الزاويـــــة الموجهـــــــة

حساب مثلثات

## الزاوية الموجهة:

هى زوج مرتب من شعاعين لهما نفس نقطة البداية ويسمى المسقط الأول الضلع الإبتدائى ويسمى المسقط الثانى الضلع النهائى

==========================================

الشكل المقابل

يمثل : ∠ أ و ب الموجهة

ب
نهائى
و
ابتدائى

ويمكن التعبير عنها كزوج مرتب:

( و⃖أ ، و⃖ب )

ويسمى :

الضلع : و⃖أ الضلع الإبتدائى

والضلع : و⃖ب الضلع النهائى



==========================================

### مثـــال ١

فى الشكل المقابل :

ص
ع
س

أكمل مايأتى :

١ الشكل يمثل : ∠ .......... الموجهة

٢ يعبر عن هذه الزاوية بالزوج المرتب :

(..... ، .....)

٣ الضلع الإبتدائى هو ............

٤ الضلع النهائى هو ............

## القياس الموجب والقياس السالب للزاوية الموجهة

يرسم داخل الزاوية الموجهة سهم ليشير من الضلع الإبتدائى إلى الضلع النهائى

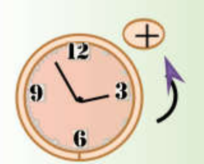
:

أ إذا كان اتجاه السهم فى إتجاه دوران عقارب الساعة كان قياسها سالبا




==========================================

ب إذا كان السهم فى اتجاه عكس إتجاه دوران عقارب الساعة كان قياسها موجبا




==========================================

الشكل المقابل

يمثل: ∠ أ و ب الموجهة

وهى زاوية قياسها موجب

ب
و
أ

---

الشكل المقابل

يمثل: ∠ أ و ب الموجهة

وهى زاوية قياسها موجب

ب
و
أ

∴ للزاوية الموجهة قياسان أحدهما موجب والآخر سالب ويكون

القياس الموجب + القيمة المطلقة للقياس السالب = ٣٦٠°

الزاوية التى قياسها الموجب = ١٥٠°

يكون قياسها السالب = ١٥٠° − ٣٦٠°
= −٢١٠°

الزاوية التى قياسها السالب = −٧٢°

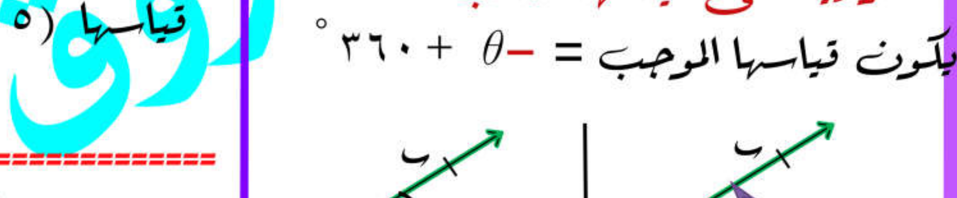
يكون قياسها الموجب = −٧٢ + ٣٦٠°
= ٢٨٨°

الزاوية التى قياسها الموجب = $\theta$

يكون قياسها السالب = $\theta$ − ٣٦٠°

الزاوية التى قياسها السالب = −$\theta$

يكون قياسها الموجب = −$\theta$ + ٣٦٠°




(∠ أ و ب) الموجهة ≠ (∠ ب و أ) الموجهة

## مثال ٢

أوجد القياس الآخر للزوايا الموجهة التى قياساتها كالتالى

١) −٦٠°  ٢) ١٢٠°

٣) −٣٠٠°  ٤) ١٠٥°

## الحل

١) القياس الموجب للزاوية التى قياسها

(−٦٠°) = −٦٠° + ٣٦٠°
= ٣٠٠°

٢) القياس السالب للزاوية الموجهة التى

قياسها (١٢٠°) = ١٢٠° − ٣٦٠°
= −٢٤٠°

٣) القياس الموجب للزاوية التى قياسها

(−٣٠٠°) = −٣٠٠° + ٣٦٠°
= ٦٠°

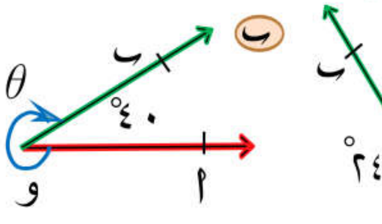
٤) القياس السالب للزاوية الموجهة التى

قياسها (١٠٥°) = ١٠٥° − ٣٦٠°
= −٢٥٥°

## مثال ٣

أوجد قياس الزاوية ($\theta$) فى كل من الأشكال التالية

أ) ب)



(أ) **الحل**

∵ اتجاه السهم فى عكس اتجاه دوران عقارب الساعة

∴ $\theta$ قياسها موجبا

$\theta = ٣٦٠^\circ - ٢٤٠^\circ = ١٢٠^\circ$

(ب)

اتجاه السهم فى اتجاه دوران عقارب الساعة

$\theta$ قياسها سالبا

∴ $\theta = -(٣٦٠^\circ - ٤٠^\circ) = -٣٢٠^\circ$

## الوضع القياسي للزاوية الموجهة

تكون الزاوية الموجهة مرسومة فى الوضع القياسى إذا تحقق الشرطان الآتيان معاً

١) رأسها نقطة الأصل (و)

٢) ضلعها الإبتدائى هو الجزء الموجب لمحور السينات

(∠ أ و ب) الموجهة فى الوضع القياسى

الشكل المقابل : يمثل ∠ أ و ب الموجهة

- رأسها نقطة الأصل ( و )
- ضلعها الإبتدائى هو و أ ينطبق على الجزء الموجب لمحور السينات
- ضلعها النهائى هو و ب
- السهم المرسوم بداخلها فى عكس اتجاه دوران الساعة

∴ قياسها موجب

### مثال ٤

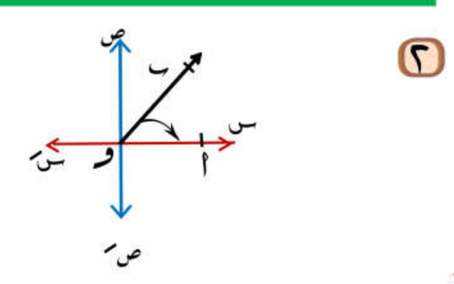
أى من الزوايا الموجهة الآتية فى وضعها القياسى

(١)

**الحل**

∠ أ حـ ب الموجهة ليست فى الوضع القياسى لأن رأسها لا تقع على نقطة الأصل

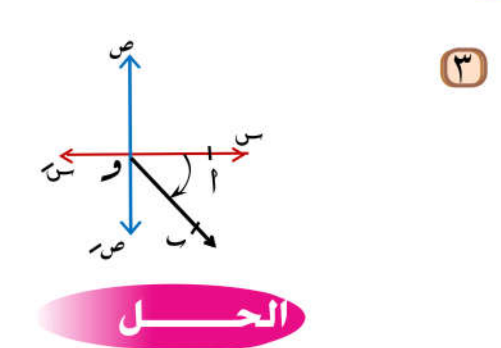
(٢)




**الحل**

∠ ب و أ ) الموجهة ليست فى الوضع القياسى لأن ضلعها الإبتدائى لا ينطبق على الجزء الموجب لمحور السينات

③




**الحل**

(∠ا و ب) الموجهة

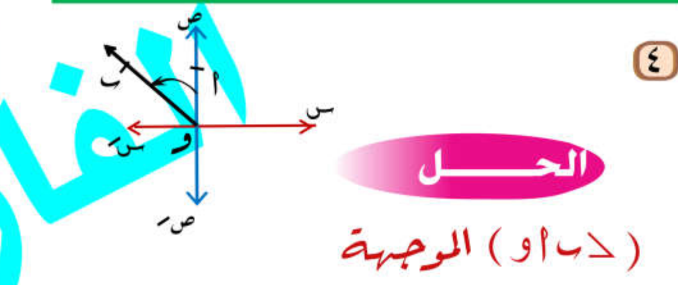
فى الوضع القياسى لأن :

– رأسها نقطة الأصل (و)

– ضلعها الإبتدائى هو الجزء الموجب لمحور السينات

---

④




**الحل**

(∠ب ا و) الموجهة

ليست فى الوضع القياسى

لأن ضلعها الإبتدائى و ا لا ينطبق على الجزء الموجب لمحور السينات

## موقع الزاوية الموجهة

إذا كانت :(∠ا و ب) الموجهة فى الوضع القياسى وقياسها θ فإنها :

① تقع فى الربع الأول

إذا كان :

■ ضلعها النهائى و ب يقع بين و س ، و ص

■ θ ∈ ]٠° ، ٩٠°[

② تقع فى الربع الثانى

إذا كان :

■ ضلعها النهائى و ب يقع بين و ص ، و س′

■ θ ∈ ]٩٠° ، ١٨٠°[

---

③ تقع فى الربع الثالث

إذا كان :

■ ضلعها النهائى و ب يقع بين و س′ ، و ص′

■ θ ∈ ]١٨٠° ، ٢٧٠°[

---

④ تقع فى الربع الرابع

إذا كان :

■ ضلعها النهائى و ب يقع بين و ص′ ، و س

■ θ ∈ ]٢٧٠° ، ٣٦٠°[



---

⑤ إذا وقع الضلع النهائى للزاوية الموجهة على أحد محاور الإحداثيات سميت زاوية ربعية

∴ الزوايا الموجهة : ٠ ، ٩٠ ، ١٨٠ ، ٢٧٠ ، ٣٦٠ ، ٤٥٠ ، ..... هى زوايا ربعية

---

**مثال ⑤**

عين الربع الذى تقع فيه الزوايا الموجهة المرسومة فى الوضع القياسى التى قياساتها كالتالى

① ٤٠°

**الحل**

∵ ٤٠° ∈ ]٠° ، ٩٠°[

∴ تقع فى الربع الأول

② $-50$

**الحل**

القياس الموجب للزاوية $= -50° + 360°$
$= 310°$

، ∵ $310° \in ]270°، 360°[$

∴ الزاوية تقع فى الربع الرابع

**أو**

ترسم من الجزء الموجب لمحور السينات فى إتجاه دوران عقارب الساعة

∴ الزاوية تقع فى الربع الرابع

③ $90°$

**الحل**

∵ عند رسم الزاوية الموجهة التى قياسها $90°$ فى الوضع القياسى فإن ضلعها النهائى يقع على الجزء الموجب لمحور الصادات

∴ الزاوية التى قياسها $90°$ هى زاوية ربعية

④ $-180°$

**الحل**

الزاوية الموجهة التى قياسها $-180°$ فى الوضع القياسى فإن ضلعها النهائى يقع على الجزء السالب لمحور السينات

∴ $-180°$ هى زاوية ربعية

## الزوايا المتكافئة

يقال لعدة زوايا فى الوضع القياسى أنها متكافئة إذا كان الضلع النهائى لهم جميعا واحد

الشكل المقابل يمثل زاوية قياسها $\theta$

عند دوران الضلع النهائى للزاوية وهو $\overrightarrow{وب}$ دورة كاملة حول نقطة الأصل فإنه يعود إلى وضعه الأصلى

∴ الزاويتان : $\theta$ ، $\theta + 1 \times 360$ متكافئتان

وكذلك عند دوران الضلع النهائى $\overrightarrow{وب}$ دورتين حول نقطة الأصل فإنه ينطبق على الضلع النهائى للزاوية التى قياسها $\theta$

∴ الزاويتان : $\theta$ ، $\theta + 2 \times 360°$ متكافئتان

وهكذا ......

∴ الزاويتان $\theta$ ، $\theta \pm ن \times 360$ حيث $ن \in ص$ متكافئتان

## أصغر قياس موجب و أكبر قياس سالب

■ لإيجاد أصغر قياس موجب مكافئ للزاوية التي قياسها ١٦٧٨°

نكتب الزاوية

١٦٧٨° = $\theta$ + ن × ٣٦٠

نوجد :

■ ن = ١٦٧٨° ÷ ٣٦٠ ≃ ٤,٦٦١١١

حيث ن عدد الدورات الكاملة

∴ ن = ٤

■ $\theta$ = الزاوية المعطاة ـ ن × ٣٦٠°

∴ $\theta$ = ١٦٧٨° ـ ٤ × ٣٦٠° = ٢٣٨°

لإيجاد أكبر قياس سالب مكافئ للزاوية التي قياسها ١٦٧٨°

أكبر قياس سالب

= ١٦٧٨° ـ (ن + ١) × ٣٦٠°

= ١٦٧٨° ـ ٥ × ٣٦٠° = ـ١٢٢°

### مثال (٦)

أوجد زاويتين إحداهما بقياس موجب والأخرى بقياس سالب مكافئ للزواية الموجهة التي قياساتها كالتالي :

(١) ٥٠°

**الحل**

القياس الموجب = ٥٠° + ٣٦٠° = ٤١٠°

القياس السالب = ٥٠° ـ ٣٦٠° = ـ ٣١٠°

(٢) ـ ١٢٠°

**الحل**

القياس الموجب = ـ١٢٠° + ٣٦٠° = ٢٤٠°

القياس السالب = ـ١٢٠° ـ ٣٦٠° = ـ٤٨٠°

(٣) ٣٤٥٦°

**الحل**

نوجد عدد الدورات الكاملة

∵ ٣٤٥٦ ÷ ٣٦٠ ≃ ٩,٦

∴ ن = ٩

الزاوية المكافئة الموجبة قياسها

= ٣٤٥٦ ـ ٩ × ٣٦٠° = ٢١٦°

الزاوية المكافئة السالبة قياسها

= ٣٤٥٦ ـ ١٠ × ٣٦٠° = ٢١٦°

= ـ١٤٤°

(٤) ـ٣٤٥٦°

**الحل**

عدد الدورات الكاملة

∵ ٣٤٥٦ ÷ ٣٦٠ ≃ ٩,٦

∴ ن = ٩

الزاوية المكافئة الموجبة قياسها

= −٣٤٥٦ + ٩ × ٣٦٠° = −٢١٦°

= −٣٤٥٦° + ١٠ × ٣٦٠° = ١٤٤°

## مثال ٧

حدد الربع الذى تقع فيه الزوايا الموجهة الذى قياساتها كالتالى

① −٢١٩٦°

### الحل

∵ ٢١٩٦° ÷ ٣٦٠ ≃ ٦,١

∴ ν = ٦

الزاوية المكافئة الموجبة قياسها

= −٢١٩٦° + ٧ × ٣٦٠° = ٣٢٤°

، ∵ ٣٢٤ ∈ ]٢٧٠°، ٣٦٠°[

∴ الزاوية تقع فى الربع الرابع

② ١٦١٥°

### الحل

∵ ١٦١٥ ÷ ٣٦٠ ≃ ٤,٤٩

∴ ν = ٤

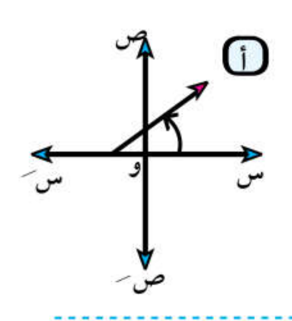
الزاوية المكافئة الموجبة قياسها

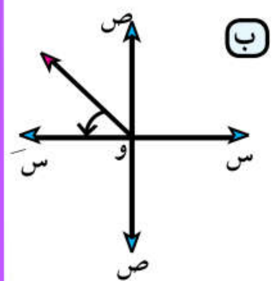
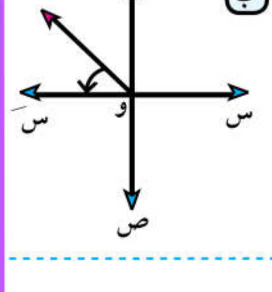
= ١٦١٥° − ٤ × ٣٦٠° = ١٧٥°

، ∵ ١٧٥ ∈ ]٩٠°، ١٨٠°[

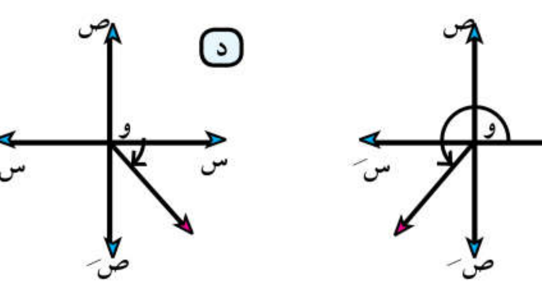
## مثال ٨

أى من الزوايا الآتية تكون فى الوضع القياسى

أ



ب




------------------------------

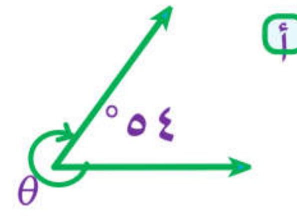
ج　　د


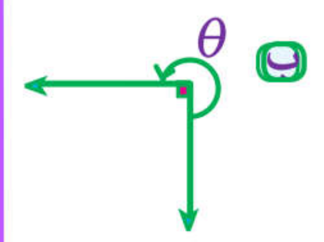

------------------------------



## مثال ٩

أوجد قياس الزاوية $(\theta)$ في كل مما يأتي

أ



ب



------------------------------

ج) $\theta$ ، ١٢٥°

د) $\theta$ ، ٥٩°

## مثال ١٠

أوجد زاويتين إحداهما بقياس موجب والأخرى بقياس سالب مكافئ للزوايا الموجهة التي قياساتها كالتالي

١) ١٧٠°

٢) −٣٩٥١°

٣) ١٢٠٠°

## مثال ١١

حدد الربع الذي تقع فيه الزوايا الموجهة التي قياساتها كالتالي

١) ٧٥٠°

٢) −١٥٢٠°

٣) −٢٧٠°

## مثال ١٢

عين أصغر قياس موجب للزوايا الموجهة التي قياساتها كالتالي

١) −٣٠٠°

٢ ) ١٢٣٧°

٣ ) −٥٩٠٨°

**مثال ١٣**

عين أكبر قياس سالب للزوايا الموجهة التى قياساتها كالتالى

١ ) ٢٣٦٧°

٢ ) −٢٥٦٧°

٣ ) −٤٩٨٧°

**اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :**

① 🕮 الزاوية التى قياسها ٦٠° فى الوضع القياسى تكافئ الزاوية التى قياسها ..........

(أ) ١٢٠° (ب) ٢٤٠° (جـ) ٣٠٠° (د) ٤٢٠°

② 🕮 الزاوية التى قياسها ٥٨٥° تكافئ فى الوضع القياسى الزاوية التى قياسها ..........

(أ) ٤٥° (ب) ١٣٥° (جـ) ٢٢٥° (د) ٣١٥°

③ الربع الذى تقع فيه الزاوية التى قياسها ١٦٧٠° هو ..........

(أ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

④ الزاوية التى قياسها (– ١٣٥°) تقع فى الربع ..........

(أ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

⑤ 🕮 الزاوية التى قياسها (– ٨٥٠°) تقع فى الربع ..........

(أ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. (د) الرابع.

⑥ جميع الزوايا التى قياساتها كالآتى تقع فى الربع الثانى ماعدا ..........

(أ) – ٢٤٠° (ب) ١٠٠° (جـ) – ١٢٠° (د) ٨٦٠°

⑦ جميع قياسات الزوايا التالية مكافئة للزاوية ٧٥° فى الوضع القياسى ماعدا ..........

(أ) – ٢٨٥° (ب) – ٦٤٥° (جـ) ٢٨٥° (د) ٤٣٥°

الدرس الثاني

# القياس الستيني والقياس الدائري للزاوية الموجهة

## أولاً : القياس الستيني

تعتمد فكرة هذا القياس على تقسيم الدائرة إلى ٣٦٠ قوساً متساوية وكل زاوية مركزية تقابل قوساً من هذه الأقواس يكون قياسها ١°

الزاوية التي قياسها ٥٠° تقابل ٥٠ قوساً من هذه الأقواس

وفي هذا القياس تقدر فيه الزاوية بالدرجات والدقائق والثواني

- وتنقسم الدرجة إلى ٦٠ جزء وكل جزء يسمى دقيقة :

∴ ١° = ٦٠َ

- وتنقسم الدقيقة إلى ٦٠ جزء كل جزء كل جزء منها يسمى ثانية

∴ ١َ = ٦٠ً

- ١٢٣° ١٥َ ٣٢ً

وتقرأ ١٢٣ درجة و ١٥ دقيقة ٣٢ ثانية

123°15°32°
123°15'32"

## ثانيا : القياس الدائري للزاوية

في الشكل المقابل :

عند قسمة طول أي قوس على نصف القطر المناظر له في نفس الدائرة تنتج القياس الدائري للزاوية ($\theta^{ء}$)

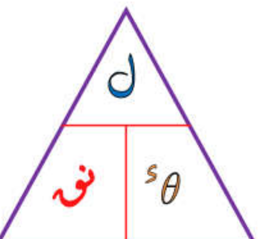
$$\theta^{ء} = \frac{ل_1}{نق_1} = \frac{ل_2}{نق_2} = \frac{ل_3}{نق_3}$$

====================================

### القياس الدائري

القياس الدائري لزاوية مركزية تحصر بين ضلعيها قوساً طوله ل في دائرة طول نصف قطرها يساوي نق هو النسبة بين طول القوس إلى طول نصف القطر

$$\theta^{ء} = \frac{ل}{نق}$$



## مثال ١

في الشكل المقابل : م دائرة طول نصف قطرها ١٠ سم ، أب قطر فيها

أوجد :

ى ( ∠ أ م ب ) المركزية بالراديان

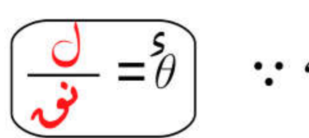
## الحل

∵ طول القوس أب = نصف طول محيط الدائرة

طول القوس أب = π نق ، نق = ١٠ سم

∴ ل = ١٠ π سم

، ∵ $\theta^{ء} = \frac{ل}{نق}$



$\theta^{ء} = \frac{١٠\pi}{١٠} = \pi$

## لاحظ

من المثال السابق نجد أن الزاوية المركزية التي قياسها ١٨٠° قياسها الدائري هو π

## ملحوظة

في دائرة الوحدة يكون طول نصف قطرها وحدة الأطوال

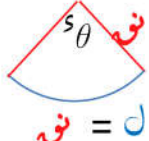
أي : نق = ١ ∴ $\theta^{ء} = \frac{ل}{\ } = ل$

∵ في دائرة الوحدة يكون القياس الدائري للزاوية المركزية = طول القوس المحصور بين ضلعيها

## الزاوية النصف قطرية (الراديان)

هي زاوية مركزية في دائرة تحصر بين ضلعيها قوساً طوله يساوي طول نصف قطر الدائرة

نق = ل




∴ $\theta^{ء} = \frac{نق}{نق} = ١^{ء}$

∴ قياس الزاوية النصف قطرية = ١ء

∴ الزاوية النصف قطرية هي وحدة قياس القياس الدائري

## مثال ٢

قياس الزاوية المركزية التي تحصر قوس في دائرة طوله يساوي ثلاثة امثال طول نصف قطر دائرتها = ......ء

## مثال ٣

زاوية مركزية فى دائرة طول نصف قطر دائرتها ١٥ سم وتحصر بين ضلعيها قوسا طوله ٢٥ سم
احسب قياسها الدائرى

## الحل

∵ ل = ٢٥ سم ، نق = ١٥ سم
، $\theta^{ء} = \frac{ل}{نق}$
∴ $\theta^{ء} = \frac{٢٥}{١٥}$
= ١,٦٦٧ ء

## مثال ٤

زاوية مركزية قياسها ١,٢ ء فى دائرة وتحصر بين ضلعيها قوساً طوله ١٢ سم
احسب محيط دائرتها

## الحل

∵ $\theta^{ء}$ = ١,٢ ء ، ل = ١٢ سم
، ∵ نق = $\frac{ل}{\theta^{ء}}$
∴ نق = $\frac{١٢}{١,٢}$ = ١٠ سم
، ∵ محيط الدائرة = ٢ π نق
∴ محيط الدائرة = ٢ × π × ١٠
= ٢٠ π سم

## مثال ٥

زاوية مركزية قياسها ١,٥ ء فى دائرة طول نصف قطرها ١٠ سم
أوجد طول قوسها

## الحل

∵ ل = $\theta^{ء}$ × نق
، نق = ١٠ سم ، $\theta^{ء}$ = ١,٥ ء
ل = ١٠ × ١,٥ = ١٥ سم

## مثال ٦

زاوية مركزية قياسها ١,٢ ء فى دائرة مساحتها ٢٥ π سم٢
احسب
طول القوس المحصور بين ضلعيها

## الحل

∵ $\theta^{ء}$ = ١,٢ ء
، ∵ مساحة الدائرة = π نق٢
∴ ٢٥ π = π نق٢
∴ ٢٥ = نق٢ ∴ نق = ٥ سم
∵ ل = $\theta^{ء}$ × نق ∴ ل = ١,٢ × ٥ = ٦ سم

# العلاقة بين القياس الستيني والقياس الدائري

يوجد للزاوية وحدتى قياس هما
والقياس الستينى ( $س^\circ$ )
القياس الدائرى ( $\theta^{ء}$ )

**ويمكن التحويل بينهما**

سبق أن تناولنا علاقة

$$\frac{\text{قياس القوس}}{\text{قياس الدائرة}} = \frac{\text{طول القوس}}{\text{محيط الدائرة}}$$

قياس القوس = قياس الزاوية المركزية

$$\therefore \frac{س^\circ}{360^\circ} = \frac{ل}{2\pi نق}$$ بالضرب × ٢ للطرفين

$$\therefore \frac{س^\circ}{180^\circ} = \frac{ل}{\pi\, نق}$$ ، $\theta^{ء} = \frac{ل}{نق}$

$$\therefore \frac{س^\circ}{180^\circ} = \frac{\theta^{ء}}{\pi}$$

$$\frac{\text{القياس الستينى}}{180^\circ} = \frac{\text{القياس الدائرى}}{\pi}$$

$$\therefore \text{القياس الستينى} = \frac{\text{القياس الدائرى}}{\pi} \times 180^\circ$$

$$\text{، القياس الدائرى} = \frac{\text{القياس الستينى}}{180^\circ} \times \pi$$

## مثال (١)

فى الشكل المقابل : زاوية مركزية قياسها $\theta$

نق = ١٢ سم ، ل = ١٥ سم

فإن :
(١) $\theta$ = ............ ء
(٢) $\theta$ = ............ °

## الحل

$\because$ نق = ١٢ سم ، ل = ١٥ سم

، $\theta^{ء} = \frac{ل}{نق}$

$$\therefore \theta^{ء} = \frac{15}{12}$$

$= 1{,}25^{ء}$

بالتحويل إلى القياس الستينى

$$\therefore س^\circ = \frac{\theta^{ء} \times 180^\circ}{\pi}$$

$$\therefore س^\circ = \frac{1{,}25 \times 180^\circ}{\pi}$$

$= 71^\circ\ 37'\ 11''$

```
1.25×180°
   π
      71°37'11.01"
```

## مثال ٢

الشكل المقابل يمثل زاوية مركزية قياسها ١٢٠° فى دائرة طول نصف قطرها ٢٠ سم احسب طول القوس المقابل لها

نق = ٢٠ سم ، ١٢٠° ، م ، أ ، ب ، ل

### الحل

نوجد القياس الدائرى للزاوية المركزية

$\because \theta^{د} = \frac{س^\circ}{180^\circ} \times \pi$ $\therefore \theta^{د} = \frac{120^\circ}{180^\circ} \times \pi$

120° × π / 180° → 2/3 π

نضغط على المفتاح S⇔D فنحصل على النتيجة

120° × π / 180° = 2.094395102

$\theta^{د} \simeq 2,094$

$\because ل = \theta^{د} \times نق$

$\therefore ل = 2,094 \times 20$

$\simeq 41,88$

## مثال ٣

فى الشكل المقابل م دائرة طول نصف قطرها ٥ سم رسم $\overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة عند ب ، $\overline{أم}$ تقطع الدائرة فى ء بحيث أء = ءم

إحسب محيط الشكل المظلل

### الحل

$\because$ أء = ءم = م ب = ٥ سم

$\therefore$ أم = ١٠

$\because \overleftrightarrow{أب}$ مماس للدائرة عند ب

ق(∠ أب م) = ٩٠°

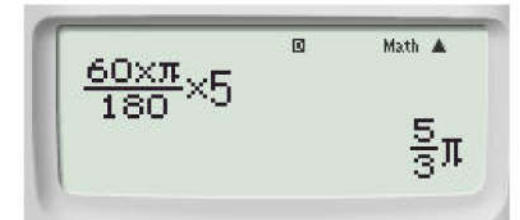
$\therefore$ جتا م = $\frac{ب م}{أ م} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

$\therefore$ ق(∠ أم ب) = ٦٠°

$\because$ طول $\overset{\frown}{ءب} = \theta^{د} \times نق$

$\therefore$ طول $\overset{\frown}{ءب} = \frac{60 \times \pi}{180^\circ} \times 5$

$= \frac{5}{3}\pi$ سم






∵ Δ أ ب م قائم الزاوية فى ب

من نظرية فيثاغورث

∴ أ ب = $\sqrt{(أم)^٢ - (ب م)^٢}$

= $\sqrt{(١٠)^٢ - (٥)^٢}$

= $\sqrt{١٠٠ - ٢٥}$

= $\sqrt{٧٥}$ = ٥ $\sqrt{٣}$

∵ محيط الشكل المظلل

= أ ب + أ ء + طول ⌒ب ء

= ٥ $\sqrt{٣}$ + ٥ + $\frac{٥}{٣}\pi$

= ٥ ( $\sqrt{٣}$ + ١ + $\frac{\pi}{٣}$ ) سم

≃ ١٨,٨٩ سم

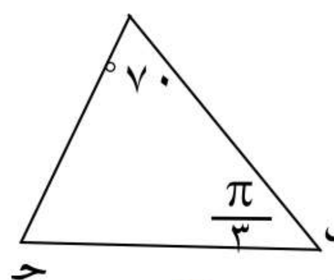
## مثال ٤

مثلث قياس إحدى زواياه ٧٠° وقياس زاوية أخرى منه $\frac{\pi}{٣}$

أوجد :

القياس الستينى والقياس الدائرى للزاوية الثالثة

## الحل




فى Δ أ ب حـ

نفرض أن

ق ( ∠ أ ) = ٧٠° ← ①

، ق ( ∠ ب ) = $\frac{\pi}{٣}$

نوجد القياس الستينى للزاوية ب

ق ( ∠ ب ) = $\frac{\frac{\pi}{٣} \times ١٨٠°}{\pi}$ = ٦٠° ← ②

مجموع قياسات الزوايا المثلث الداخلة

= ١٨٠°

ق ( ∠ حـ ) = ١٨٠° − (٦٠° + ٧٠°)

= ٥٠°

∴ ق ( ∠ حـ ) = $\frac{٥٠° \times \pi}{١٨٠°}$

$\frac{٥}{١٨}\pi$

50×π / 180 = 5/18 π

∴ ق ( ∠ حـ ) = ٠,٨٧ ء

50×π / 180 = 0.872664626



**ملحوظة**

الزاوية التي قياسها $180^\circ$ قياسها الدائري يساوي $\pi$

∴ إذا كانت الزاوية الموجهة بدلالة $\pi$ لتحويلها إلى قياس ستيني مباشرة بدون تطبيق القانون نحول $\pi$ إلى $180^\circ$

---

## مثال ٥

أوجد القياس الستيني للزاوية الموجهة التي قياساتها كالتالي

(١) $\frac{5\pi}{3}$

### الحل

القياس الستيني $= \frac{5\pi}{3} \times \frac{180^\circ}{\pi}$

$= \frac{180^\circ \times 5}{3} = 300^\circ$

---

(٢) ٠,٧٥

### الحل

القياس الستيني $= \frac{180^\circ \times 0{,}57}{\pi}$

$= 32^\circ\ 39'\ 31''$

---

## مثال ٦

$\triangle$ أ ب ح فيه :

ق(∠ أ) $= \frac{1}{2}$ ق(∠ ب) $= \frac{1}{3}$ ق(∠ ح)

أوجد القياس الستيني و الدائري لزاوية ح

### الحل

نفرض أن :

ق(∠ أ) $= \frac{1}{2}$ ق(∠ ب) $= \frac{1}{3}$ ق(∠ ح) = ك

∴ ق(∠ أ) = ك ← (١)

، $\frac{1}{2}$ ق(∠ ب) = ك

∴ ق(∠ ب) = ٢ك ← (١)

، $\frac{1}{3}$ ق(∠ ح) = ك

∴ ق(∠ ح) = ٣ ك ← (١)

∵ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة $= 180^\circ$

∴ ق(∠ أ) + ق(∠ ب) + ق(∠ ح) $= 180^\circ$

∴ ك + ٢ك + ٣ ك = ١٨٠

ك + ٢ك + ٣ ك = ١٨٠

∴ ٦ ك $= 180^\circ$

∴ ك $= 30^\circ$

∵ ق(∠ ح) = ٣ ك

∴ ق(∠ ح) $= 3 \times 30^\circ = 90^\circ$

∴ ق ∠ ح $= \frac{90 \times \pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{2}$

**اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاه :**

(١) الزاوية التى قياسها $\frac{٢٥ \pi}{٩}$ تقع فى الربع ..........

( أ ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. ( د ) الرابع.

(٢) 📖 الزاوية التى قياسها $\frac{٣١ \pi}{٦}$ تقع فى الربع ..........

( أ ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. ( د ) الرابع.

(٣) 📖 الزاوية التى قياسها $\frac{-٩ \pi}{٤}$ تقع فى الربع ..........

( أ ) الأول. (ب) الثانى. (جـ) الثالث. ( د ) الرابع.

(٤) إذا كان القياس الستينى لزاوية ١٢َ ٤٣° فإن قياسها الدائرى = ..........

( أ ) ٠,٢٤ ء (ب) ٠,٢٤ $\pi$ (جـ) ٠,٢٨ ء ( د ) ٠,٢٨ $\pi$

(٥) الزاوية التى قياسها $\frac{٨ \pi}{٣}$ قياسها الستينى يساوى ..........

( أ ) ٥٤٠° (ب) ٨٢٠° (جـ) ١٥٠° ( د ) ٤٨٠°

(٦) طول القوس فى دائرة طول قطرها ١٢ سم ويقابل زاوية مركزية قياسها ٦٠° يساوى .......... سم.

( أ ) ٥ $\pi$ (ب) ٤ $\pi$ (جـ) ٣ $\pi$ ( د ) ٢ $\pi$

(٧) 📖 القوس الذى طوله ٥ $\pi$ سم فى دائرة طول نصف قطرها ١٥ سم يقابل زاوية مركزية قياسها يساوى ..........

( أ ) ٣٠° (ب) ٦٠° (جـ) ٩٠° ( د ) ١٨٠°

(٨) إذا كان قياس إحدى زوايا مثلث ٧٥° وقياس زاوية أخرى $\frac{\pi}{٣}$ فإن القياس الدائرى للزاوية الثالثة يساوى ..........

( أ ) $\frac{\pi}{٣}$ (ب) $\frac{\pi}{٤}$ (جـ) $\frac{\pi}{٦}$ ( د ) $\frac{٥ \pi}{١٢}$

(٩) 📖 إذا كان مجموع قياسات زوايا أى مضلع منتظم تساوى ١٨٠° × (ن − ٢) حيث ن عدد الأضلاع ، فإن قياس زاوية الشكل الخماسى المنتظم بالقياس الدائرى تساوى ..........

( أ ) $\frac{\pi}{٣}$ (ب) $\frac{٧ \pi}{٢}$ (جـ) $\frac{٣ \pi}{٥}$ ( د ) $\frac{٢ \pi}{٣}$

(١٠) مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعى بالتقدير الدائرى تساوى ..........

( أ ) ٢ $\pi$ (ب) $\pi$ (جـ) $\frac{٣ \pi}{٢}$ ( د ) ٣ $\pi$

**(١١) فى الدائرة التى طول نصف قطرها وحدة الأطوال قياس الزاوية المركزية بالتقدير الدائرى يساوى ..........**

**( أ ) $\frac{١}{٤}$ طول قوسها. (ب) $\frac{١}{٢}$ طول قوسها.**

**(جـ) طول قوسها. ( د ) ضعف طول قوسها.**

**(١٢) إذا كان طول قوس من دائرة يساوى $\frac{٣}{٨}$ محيطها فإن الزاوية المركزية التى تقابل هذا القوس قياسها الستينى ..........**

**( أ ) ٣٠° (ب) ٣٠َ ٦٧° (جـ) ١٣٥° ( د ) ٤٣° تقريبًا.**



**٢** أوجد بدلالة $\pi$ القياس الدائرى لكل من الزوايا التى قياساتها كالآتى :

| | | | |
|---|---|---|---|
| (١) ١٣٥° | (٢) ٩٠° | (٣) ٣٠٠° | (٤) −٢٣٥° |
| (٥) −٢١٠° | (٦) ١١٢° ٣٠َ | (٧) ٣٩٠° | (٨) ٧٨٠° |

**٣** أوجد القياس الدائرى لكل من الزوايا التى قياساتها الستينية كالآتى مقربًا الناتج لثلاثة أرقام عشرية :

| | | |
|---|---|---|
| (١) ٥٨° | (٢) ٥٦,٦° | (٣) ٣٧° ١٥َ |
| (٤) ١١٥° ٣٨َ ٩ً | (٥) ٢٥٧° ٥٤َ | (٦) ١٦٠° ٥٠َ ٤٨ً |

**٤** أوجد القياس الستينى (بالدرجات والدقائق والثوانى) لكل من الزوايا التى قياساتها الدائرية كالآتى :

| | | |
|---|---|---|
| (١) $\frac{١١}{١٥}\pi$ | (٢) ٠,٧٢ $\pi$ | (٣) ٠,٤٩ ء |
| (٤) −١,٦٧ ء | (٥) ٢,٢٧ ء | (٦) −٣ $\frac{١}{٢}$ ء |

**٥**



**٦** أوجد طول نصف قطر الدائرة المرسوم بها زاوية مركزية قياسها ($\theta$) وطول القوس المحصور (ل) فى كل من الحالات الآتية :

| | |
|---|---|
| (١) $\theta$ = $\frac{٩}{٨}\pi$ ، ل = ٢٢,٥ سم | (٢) $\theta$ = ٠,٧٦٧ ء ، ل = ٣٨,٣٥ سم |
| (٣) $\theta$ = ١٣٩° ، ل = ٢٤,٣٢٥ سم | (٤) $\theta$ = ٧٨° ٣٦َ ٢٦ً ، ل = ٤٣,٩٢ سم |





**٧ أوجد لأقرب جزء من عشـرة من السـنتيمتر طول قوس من دائرة طول نصف قطرها (نق) ويقابل زاوية مركزية قياسها θ فى كل من الحالات الآتية :**

**(١) نق = ١٢,٥ سم ، θ = ١,٦ ء** | **(٢) نق = ٧,٥ سم ، θ = ٤٠َ ٦٧°**

**(٣) نق = ٢٠ سم ، θ = ٢,٤٣ ء** | **(٤) نق = ١٥ سم ، θ = ٩ً ٥٨َ ١٠٤°**

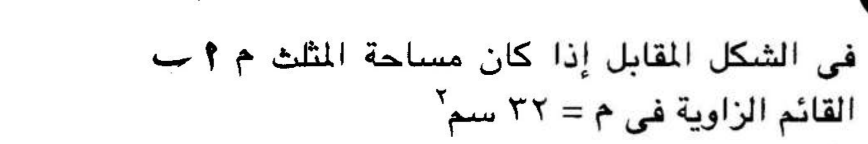


**٨ أوجد محيط الدائرة التى فيها قوس طوله ١٢ سم ويقابل زاوية محيطية قياسها ٤٥°**

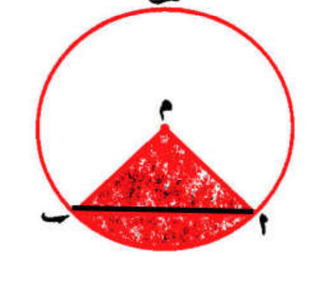
٩ شكل رباعى قياس إحدى زواياه $\frac{١١}{٦}$ ء وقياس زاوية أخرى منه $٢\frac{٤}{٩}$ ء وقياس زاوية ثالثة منه ٤٥° أوجد القياس الستينى والقياس الدائرى لزاويته الرابعة. ($\pi = \frac{٢٢}{٧}$)



١٠


فى الشكل المقابل إذا كان مساحة المثلث م أ ب القائم الزاوية فى م = ٣٢ سم²

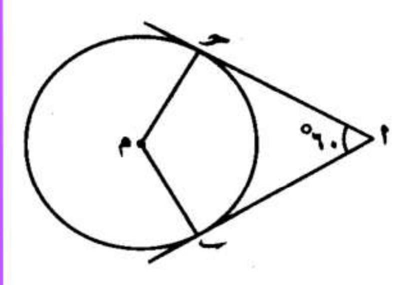
**فأوجد محيط الشكل المظلل مقربًا الناتج لأقرب رقمين عشريين.**






**١١ فى الشكل المقابل :** $\overleftarrow{أب}$ ، $\overleftarrow{أحـ}$ مماسان للدائرة م ، ق (∠ حـ أ ب) = ٦٠° ، أ ب = ١٢ سم.

**أوجد لأقرب عدد صحيح طول القوس الأكبر** $\overset{\frown}{بحـ}$



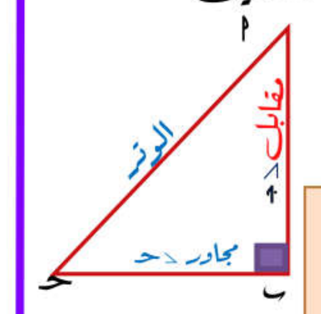



# الدوال المثلثية

## الدوال المثلثية للزاوية الحادة

تذكر أن :

إذا كان : △ ا ب ح قائم الزاوية في ∠ ب
فإن كلاً من ا ، ح حادتين




فإن الدوال المثلثية للزاوية ح هي

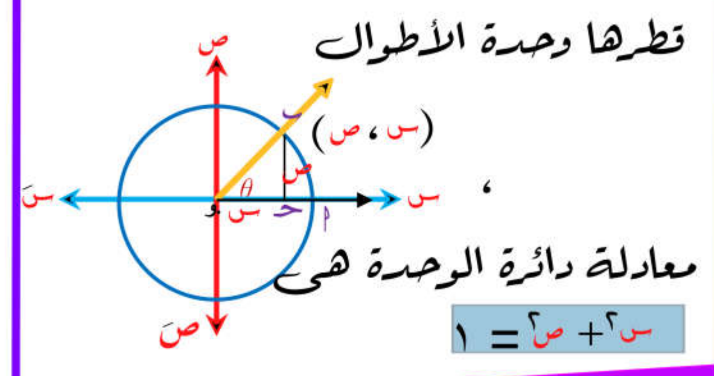
① جتا ح = المجاور / الوتر = ب ح / ا ح

② حا ح = المقابل / الوتر = ا ب / ا ح

③ طا ح = المقابل / المجاور = ا ب / ب ح

## دائرة الوحدة

هي دائرة مركزها نقطة الأصل في نظام إحداثي متعامد وطول نصف قطرها وحدة الأطوال



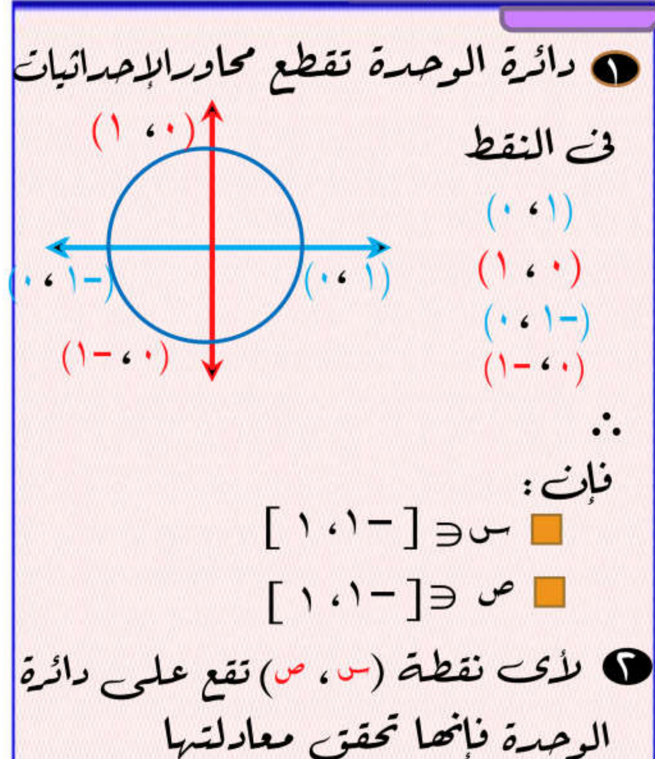

معادلة دائرة الوحدة هي

$س^2 + ص^2 = 1$

### ملاحظات مهمة

❶ دائرة الوحدة تقطع محاور الإحداثيات في النقط

(١ ، ٠)
(٠ ، ١)
(-١ ، ٠)
(٠ ، -١)




∴ فإن :

- س ∈ [ -١ ، ١ ]
- ص ∈ [ -١ ، ١ ]

❷ لأي نقطة (س ، ص) تقع على دائرة الوحدة فإنها تحقق معادلتها

$س^2 + ص^2 = 1$

### مثال ١

إذا كانت النقطة ( ٣ ا ، ٤ ا ) ، ا > ٠ تقع على دائرة الوحدة أوجد: قيمة ا

### الحل

∵ النقطة ( ٣ ا ، ٤ ا ) تقع على دائرة الوحدة

∴ تحقق معادلتها $س^2 + ص^2 = 1$

∴ $(٣ ا)^2 + (٤ ا)^2 = ١$

∴ $٩ ا^2 + ١٦ ا^2 =$

∴ $٢٥ ا^2 = ١$ ∴ ا = $\frac{١}{٢٥}$

∴ أ = ± $\sqrt{\frac{١}{٢٥}}$   ∴ أ = ± $\sqrt{\frac{١}{٥}}$

∵ أ > ٠   ∴ أ = $\sqrt{\frac{١}{٥}}$

---

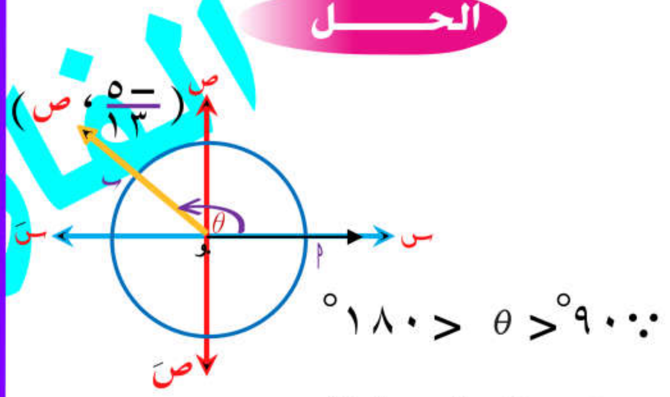
## مثال ٢

إذا كان θ هو قياس زاوية موجهة في الوضع القياسي ضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة ($\frac{-٥}{١٣}$ ، ص)

حيث : ٩٠ < θ < ١٨٠

أوجد قيمة : ص

## الحل




∵ ٩٠° < θ < ١٨٠°

∴ تقع في الربع الثاني

∴ ص > ٠

، ∵ النقطة ($\frac{-٥}{١٣}$ ، ص) تقع على دائرة الوحدة

∴ $(\frac{-٥}{١٣})^٢ + (ص)^٢ = ١$

∴ $\frac{٢٥}{١٦٩}$ + ص² = ١

∴ ص² = ١ − $\frac{٢٥}{١٦٩}$

∴ ص² = $\frac{١٤٤}{١٦٩}$   ∴ ص = ± $\sqrt{\frac{١٤٤}{١٦٩}}$

∴ ص = ± $\frac{١٢}{١٣}$ ، ∵ ص > ٠

∴ ص = $\frac{١٢}{١٣}$

---

# الدوال المثلثية

إذا كان : θ هو قياس زاوية موجهة في الوضع القياسي ضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة ( س ، ص )

فإن :

### الدوال المثلثية

cosθ

① جتا θ = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{س}{١}$ = س

∴ جتا θ = الإحداثي السيني لنقطة ب

② جا θ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{ص}{١}$ = ص

∴ جا θ = الإحداثي الصادي لنقطة ب

sinθ

③ ظا θ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ = $\frac{ص}{س}$

tanθ

∴ ظا θ = $\frac{\text{الإحداثي الصادي للنقطة ب}}{\text{الإحداثي السيني للنقطة ب}}$

فمثلاً :

إذا كانت : $\theta$ قياس زاوية موجهة فى الوضع القياسى ضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة ب $(\frac{٣}{٥} ، \frac{٤}{٥})$

فإن :

① حتا $\theta$ = س = $\frac{٣}{٥}$

② حا $\theta$ = ص = $\frac{٤}{٥}$

③ طا $\theta$ = $\frac{ص}{س}$ = $\frac{٤}{٣}$

---

**مثال ٣**

إذا كانت : $\theta$ هو قياس زاوية موجهة فى الوضع القياسى يقطع ضلعها النهائى دائرة الوحدة فى النقطة ب (-٠,٦ ، ص) حيث : $\theta \in$ ]١٨٠ ، ٢٧٠[ فأوجد جميع الدوال المثلثية للزاوية التى قياسها $\theta$

**الحل**

∵ ١٨٠ < $\theta$ < ٢٧٠

تقع فى الربع الثالث

∴ ص < ٠

∵ النقطة ب (-٠,٦ ، ص) تقع على دائرة الوحدة

∴ س$^{٢}$ + ص$^{٢}$ = ١

∴ (-٠,٦)$^{٢}$ + (ص)$^{٢}$ = ١

∴ ٠,٣٦ + ص$^{٢}$ = ١

∴ ص$^{٢}$ = ١ - ٠,٣٦

∴ ص$^{٢}$ = ٠,٦٤    ∴ ص = ± $\sqrt{٠,٦٤}$

∴ ص = ± ٠,٨    ∵ ص < ٠

∴ ص = -٠,٨

∴ نقطة تقاطع الضلع النهائى مع دائرى الوحدة هى ب (-٠,٦ ، -٠,٨) فيكون

① حتا $\theta$ = س = -٠,٦

② حا $\theta$ = ص = -٠,٨

③ طا $\theta$ = $\frac{ص}{س}$ = $\frac{-٠,٨}{-٠,٦}$ = $\frac{٤}{٣}$

---

## مقلوبات الدوال المثلثية

**مقلوبات الدوال المثلثية**

① قاطع الزاوية $\theta$ = قا$\theta$ = $\frac{١}{حتا \theta}$    $sec\theta$

② قاطع تمام الزاوية $\theta$ = قتا$\theta$ = $\frac{١}{حا \theta}$    $csc\theta$

③ ظل تمام الزاوية $\theta$ = ظتا $\theta$ = $\frac{١}{طا \theta}$    $cot\theta$

## مثال ٤

إذا كانت: $\theta$ قياس زاوية موجهة فى الوضع القياسى ضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة ب $\left(\frac{٥}{١٣} ، \frac{١٢}{١٣}\right)$ فأوجد جميع الدوال المثلثية للزاوية $\theta$ ومقلوباتها

### الحل

١) حتا $\theta$ = س = $\frac{٥}{١٣}$

ومقلوبها

قا $\theta$ = $\frac{١}{حتا\ \theta}$ = $\frac{١}{س}$ = $\frac{١٣}{٥}$

٢) حا $\theta$ = ص = $\frac{١٢}{١٣}$

ومقلوبها

قتا $\theta$ = $\frac{١}{حا\ \theta}$ = $\frac{١}{ص}$ = $\frac{١٣}{١٢}$

٣) طا $\theta$ = $\frac{ص}{س}$ = $\frac{١٢}{٥}$

ومقلوبها

ظتا $\theta$ = $\frac{١}{طا\ \theta}$ = $\frac{حتا\theta}{حا\theta}$ = $\frac{س}{ص}$ = $\frac{٥}{١٢}$

## مثال ٥

إذا كانت: قياس زاوية موجهة فى الوضع القياسى والنقطة (٣ ، ٤) تقع على ضلعها النهائى أوجد نقطة تقاطع ضلعها النهائى مع دائرة الوحدة ثم أوجد جميع الدوال المثلثية ومقلوباتها للزاوية $\theta$

### الحل



∵ النقطة ح (٣ ، ٤) تقع على الضلع النهائى للزاوية

∴ وم = ٣ وحدات طول

، م ح = ٤ وحدات طول

∴ وح = ٥ وحدات طول

∴ حتا $\theta$ = $\frac{٣}{٥}$ ، حا $\theta$ = $\frac{٤}{٥}$

نقطة ب $\left(\frac{٣}{٥} ، \frac{٤}{٥}\right)$ هى نقطة تقاطع ضلعها النهائى مع دائرة الوحدة

١) حتا $\theta$ = س = $\frac{٣}{٥}$ ، قا $\theta$ = $\frac{٥}{٣}$

٢) حا $\theta$ = ص = $\frac{٤}{٥}$ قتا $\theta$ = $\frac{٥}{٤}$

٣) طا $\theta$ = $\frac{ص}{س}$ = $\frac{٤}{٣}$ ، ظتا $\theta$ = $\frac{٣}{٤}$

∴ جتا $\theta = \frac{٣}{٥}$ ، جا $\theta = \frac{٤}{٥}$

نقطة ب $(\frac{٣}{٥} ، \frac{٤}{٥})$ هى نقطة تقاطع ضلعها النهائى مع دائرة الوحدة

(١) جتا $\theta$ = س $= \frac{٣}{٥}$ ، قا $\theta = \frac{٥}{٣}$

---

(٢) جا $\theta$ = ص $= \frac{٤}{٥}$ ، قتا $\theta = \frac{٥}{٤}$

---

(٣) ظا $\theta = \frac{ص}{س} = \frac{٤}{٣}$ ، ظتا $\theta = \frac{٣}{٤}$

---

## مثال ٦

إذا كان الضلع النهائى لزاوية موجهة فى الوضع القياسى قياسها $\theta$ يقطع دائرة الوحدة فى النقطة (٢أ ، أ) ، أ > ٠

أوجد قيمة أ

أوجد قيمة المقدار :

١ + ظا$^{٢}\theta$ − قا$^{٢}\theta$

## الحل

∵ النقطة ب (٢أ ، أ) تقع على دائرة الوحدة

∴ س$^{٢}$ + ص$^{٢}$ = ١

∴ (٢أ)$^{٢}$ + (أ)$^{٢}$ = ١

∴ ٤أ$^{٢}$ + أ$^{٢}$ = ١

∴ ٥أ$^{٢}$ = ١

∴ أ$^{٢} = \frac{١}{٥}$ ∴ أ $= \pm\sqrt{\frac{١}{٥}}$

∵ أ > ٠ ∴ أ $= \sqrt{\frac{١}{٥}} = \frac{١}{\sqrt{٥}}$

∴ النقطة هى $(\frac{٢}{\sqrt{٥}} ، \frac{١}{\sqrt{٥}})$

(١) جتا $\theta$ = س $= \frac{٢}{\sqrt{٥}}$

ومقلوبها

قا $\theta = \frac{١}{جتا\,\theta} = \frac{١}{س} = \frac{\sqrt{٥}}{٢}$

---

(٢) جا $\theta$ = ص $= \frac{١}{\sqrt{٥}}$

ومقلوبها

قتا $\theta = \frac{١}{جا\,\theta} = \frac{١}{ص} = \sqrt{٥}$

---

(٣) ظا $\theta = \frac{ص}{س} = \frac{١}{٢}$

ومقلوبها

ظتا $\theta = \frac{١}{ظا\,\theta} = \frac{جتا\,\theta}{جا\,\theta} = \frac{س}{ص} = ٢$

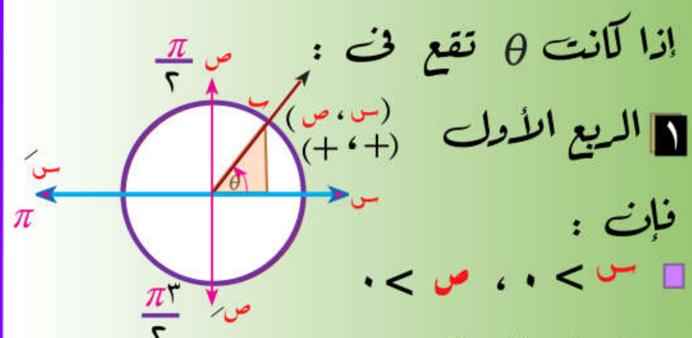




## إشارات الدوال المثلثية

إذا كانت : $\theta$ قياس زاوية موجهة فى الوضع القياسى ضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة ب(س، ص)

إذا كانت $\theta$ تقع فى :




**١ الربع الأول**

فإن :

- س > ٠ ، ص > ٠
- الضلع النهائى يقع بين $\overrightarrow{\text{وس}}$ ، $\overrightarrow{\text{وص}}$
- $\theta \in$ ]٠ ، ٩٠[ أ، $\theta \in$ ]٠ ، $\frac{\pi}{2}$[
- كل النسب المثلثية للزاوية $\theta$ اشارتها موجبة

**٢ الربع الثانى**

$\frac{\pi}{2}$ ص ب(ـ س، ص) س َ $\pi$ س $\theta$ $\frac{3\pi}{2}$ ص َ

- س < ٠ ، ص > ٠
- الضلع النهائى يقع بين $\overrightarrow{\text{وس}}$ ، $\overrightarrow{\text{وص}}$
- $\theta \in$ ]٩٠ ، ١٨٠[ أ، $\theta \in$ ]$\frac{\pi}{2}$ ، $\pi$[
- إشارة كل من : حا $\theta$ ، قتا $\theta$ موجبتان

وباقى النسب المثلثية للزاوية $\theta$ تكون سالبة

---

### مثال ٧

عين إشارة كل من :

١ حا ٥٠° ٢ قا ٧٠°

**الحل**

١ ∵ ٥٠° تقع فى الربع الأول

∴ إشارة حا ٥٠° موجبة

---

٢ ∵ ٧٠° تقع فى الربع الأول

∴ إشارة قا ٧٠° موجبة

### مثال ٨

عين إشارة كل من :

١ حتا ١٢٠°

**الحل**

∵ ١٢٠° تقع فى الربع الثانى

∴ إشارة حتا ١٢٠° سالبة

---

٢ قتا ١٧٠°

**الحل**

∵ ١٧٠° تقع فى الربع الثانى

∴ إشارة قتا ١٧٠° موجبة





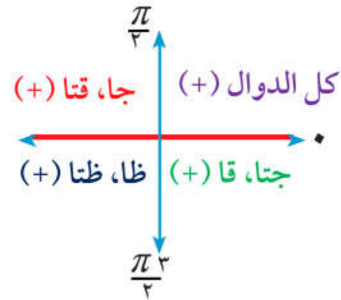
## ٣ الربع الثالث

- س < ٠ ، ص < ٠
- الضلع النهائى يقع بين و س´ ، و ص´
$\theta \in ]180°, 270°[$ أ، $\theta \in ]\pi, \frac{3\pi}{2}[$
- إشارة كل من :
ظا $\theta$ ، ظتا $\theta$ موجبتان
وباقى النسب المثلثية للزاوية $\theta$ تكون سالبة



## ٤ الربع الرابع

- س > ٠ ، ص < ٠
- الضلع النهائى يقع بين و س ، و ص´
$\theta \in ]270°, 360°[$ أ، $\theta \in ]\frac{3\pi}{2}, 2\pi[$
- إشارة كل من :
حتا $\theta$ ، قا $\theta$ موجبتان
وباقى النسب المثلثية للزاوية $\theta$ تكون سالبة




| يقع فى الربع الضلع النهائى | الفترة التى يقع فيها قياس الزاوية | إشارات الدوال المثلثية: جا، قتا | جتا، قا | ظا، ظتا |
|---|---|---|---|---|
| الأول | $]0, \frac{\pi}{2}[$ | + | + | + |
| الثانى | $]\frac{\pi}{2}, \pi[$ | + | − | − |
| الثالث | $]\pi, \frac{3\pi}{2}[$ | − | − | + |
| الرابع | $]\frac{3\pi}{2}, 2\pi[$ | − | + | − |

## مثال ٩

عين إشارة النسب المثلثية الآتية:

١ جا ٤٧٠° ٢ قا(−٣٠°)

٣ قتا $\frac{5\pi}{3}$ ٤ ظا ٣٨٥٠°

## الحل

١ ∵ الزاوية ٤٧٠° تكافئ الزاوية
٤٧٠° − ٣٦٠° = ١١٠°
∵ ٤٧٠° تقع فى الربع الثانى
∴ إشارة جا ٤٧٠° موجبة

٢ ∵ الزاوية ٤٧٠° تكافئ الزاوية
(−٣٠°) تكافئ زاوية
−٣٠ + ٣٦٠° = ٣٣٠
∵ الزاوية −٣٠° تقع فى الربع الرابع
∴ قا(−٣٠°) موجبة

٣ القياس الستينى للزاوية $\frac{5\pi}{3}$
يساوى $\frac{5 \times 180}{3} = 300°$

∴ الزاوية تقع فى الربع الرابع

∴ قتـــا $\frac{5\pi}{3}$ سالبة

---

④ طـا ٣٨٥٠°

∵ الزاوية ٣٨٥٠° تكافئ الزاوية

٣٨٥٠° − ١٠ × ٣٦٠° = ٢٥٠°

∴ الزاوية ٣٨٥٠° تقع فى الربع الثالث

---

**مثـــال ١٠**

إذا كان : $\theta \in ]$ ٠ ، $\frac{\pi}{2}[$ ، حتـا $\theta$ = ٠,٦

فأوجد قيمة المقدار : قتـا$^2\theta$ − طتـا$^2\theta$

**الحـــل**

∵ حتـا $\theta$ = ٠,٦

نفرض أن الضلع النهائى للزاوية $\theta$ يقطع دائرة الوحدة فى النقطة ( ٠,٦ ، ص ) ، $\theta$ تقع فى الربع الأول

∴ ص > ٠

∵ س$^2$ + ص$^2$ = ١

∴ (−٠,٦)$^2$ + (ص)$^2$ = ١

∴ ٠,٣٦ + ص$^2$ = ١

∴ ص$^2$ = ١ − ٠,٣٦

∴ ص$^2$ = ٠,٦٤ ∴ ص = ± $\sqrt{٠,٦٤}$

∴ ص = ± ٠,٨ ، ∵ ص > ٠

ص = ٠,٨

∴ ب ( ٠,٦ ، ٠,٨ )

∵ طتـا $\theta$ = $\frac{س}{ص}$ = $\frac{٠,٦}{٠,٨}$ = $\frac{٣}{٤}$

، قتـا $\theta$ = $\frac{١}{ص}$ = $\frac{١}{٠,٨}$ = $\frac{٥}{٤}$

∴ المقدار = قتـا$^2\theta$ − طتـا$^2\theta$

= $(\frac{٥}{٤})^2 - (\frac{٣}{٤})^2$

= $\frac{٢٥}{١٦} - \frac{٩}{١٦}$

= $\frac{١٦}{١٦}$

= ١

---

**مثـــال ١١**

إذا كانت : ١٨٠° ⩽ $\theta$ ⩽ ٢٧٠°

، وكان ظا $\theta$ = $\frac{٧}{٢٤}$ أوجد قيمة جميع النسب المثلثية للزاوية

**الحـــل**

∵ ١٨٠° ⩽ $\theta$ ⩽ ٢٧٠°

∴ $\theta$ تقع فى الربع الثالث

∴ ضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى ( −س ، −ص )

$\because$ طا $\theta = \frac{٧}{٢٤}$

$\therefore \frac{-ص}{-س} = \frac{٧}{٢٤}$ ، $\frac{ص}{س} = \frac{٧}{٢٤}$

ص = ٧ ك ، س = ٢٤ ك ، ك > ٠

$\because$ س² + ص² = ١

$\therefore$ (٢٤ ك)² + (٧ ك)² = ١

٥٧٦ ك² + ٤٩ ك² = ١

$\therefore$ ٦٢٥ ك² = ١

$\therefore$ ك² = $\frac{١}{٦٢٥}$

$\therefore$ ك = ± $\frac{١}{٢٥}$ ، $\because$ ك > ٠

$\therefore$ ك = $\frac{١}{٢٥}$

النقطة هي $(-\frac{٢٤}{٢٥} ، -\frac{٧}{٢٥})$

(١) حتا $\theta$ = س = $-\frac{٢٤}{٢٥}$

ومقلوبها

قا $\theta$ = $\frac{١}{حتا \theta}$ = $\frac{١}{س}$ = $-\frac{٢٥}{٢٤}$

(٢) حا $\theta$ = ص = $-\frac{٧}{٢٥}$

ومقلوبها

قتا $\theta$ = $\frac{١}{حا \theta}$ = $\frac{١}{ص}$ = $-\frac{٢٥}{٧}$

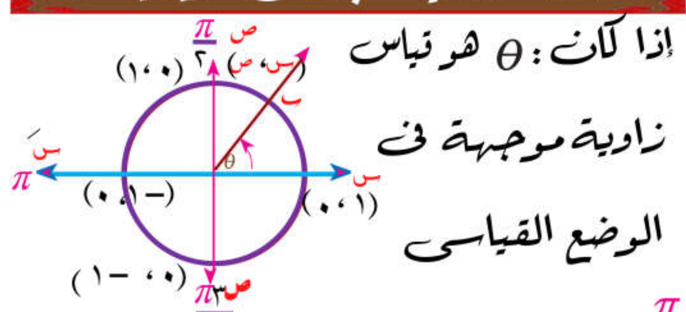
(٣) طا $\theta$ = $\frac{ص}{س}$ = $\frac{٧}{٢٤}$

ومقلوبها

طتا $\theta$ = $\frac{١}{طا \theta}$ = $\frac{س}{ص}$ = $\frac{٢٤}{٧}$

## الدوال المثلثية لبعض الزوايا الخاصة

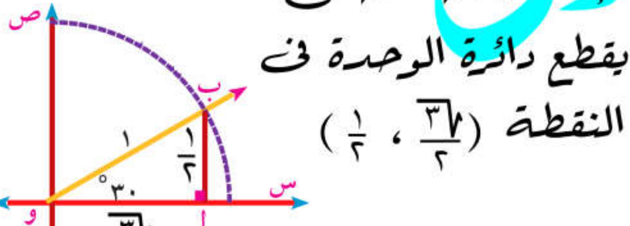
إذا كان $\theta$ : هو قياس زاوية موجهة في الوضع القياسي ، ضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة ب (س ، ص)




(١) الزوايا الربعية

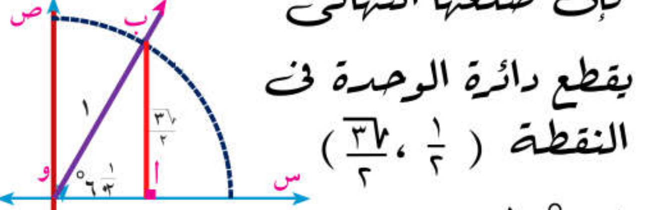
| قياس الزاوية | النقطة على دائرة الوحدة | قيم الدوال المثلثية حتا θ | حا θ | طا θ |
|---|---|---|---|---|
| ٠° أو ٣٦٠° | (١ ، ٠) | ١ | ٠ | ٠ |
| ٩٠° | (٠ ، ١) | ٠ | ١ | غير معرف |
| ١٨٠° | (-١ ، ٠) | -١ | ٠ | ٠ |
| ٢٧٠° | (٠ ، -١) | ٠ | -١ | غير معرف |

(٢) إذا كانت $\theta$ = ٣٠° $(\frac{\pi}{٦})$ فإن ضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة $(\frac{\sqrt{٣}}{٢} ، \frac{١}{٢})$




حتا ٣٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، حا ٣٠° = $\frac{١}{٢}$ ، طا ٣٠° = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

(٣) إذا كانت $\theta$ = ٦٠° $(\frac{\pi}{٣})$ فإن ضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة $(\frac{١}{٢} ، \frac{\sqrt{٣}}{٢})$




حتا ٦٠° = $\frac{١}{٢}$ ، حا ٦٠° = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، طا ٦٠° = $\sqrt{٣}$

(٢) إذا كانت $\theta$ = ٤٥° $(\frac{\pi}{٤})$

فإن ضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة $(\frac{١}{\sqrt{٢}} ، \frac{١}{\sqrt{٢}})$



جتا٤٥° = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، جا٤٥° = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، ظا ٤٥° = ١

## مثال ١٢

أثبت صحة المتطابقة الآتية :

جا٦٠° جتا ٣٠° − جتا ٦٠° جا ٣٠° = جا² $\frac{\pi}{٤}$

### الحل

الطرف الأيمن

= جا٦٠° جتا ٣٠° − جتا٦٠° جا٣٠°

= $\frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢}$

= $\frac{٣}{٤} - \frac{١}{٤}$

= $\frac{٢}{٤}$

= $\frac{١}{٢}$ ← (١)

∵ الطرف الأيسر = جا² $\frac{\pi}{٤}$

= جا² ٤٥°

= $(\frac{١}{\sqrt{٢}})^٢$

= $\frac{١}{٢}$ ← (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن الطرفين متساويان

جا٦٠° جتا٣٠° − جتا ٦٠° جا٣٠° = جا² $\frac{\pi}{٤}$

## مثال ١٣

بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة كل مما يأتى :

(١) جا٣٠° جتا٦٠° + جا٩٠° − جتا² ٤٥°

### الحل

∵ المقدار

= جا٣٠° جتا٦٠° + جا٩٠° − جتا² ٤٥°

= $\frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} + ١ - (\frac{١}{\sqrt{٢}})^٢$

= $\frac{١}{٤} + ١ - \frac{١}{٢}$

= $\frac{٣}{٤}$

(٢) جتا٣٠° ظا٦٠° + جا² ٤٥° − جتا١٨٠°

### الحل

∵ المقدار

جتا٣٠° ظا٦٠° + جا² ٤٥° − جتا١٨٠°

= $\frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \sqrt{٣} + (\frac{١}{\sqrt{٢}})^٢ - (-١)$

= $\frac{٣}{٢} + \frac{١}{٢} + ١$

= $\frac{٤}{٢} + ١$

= ٢ + ١

(٣) ظا² ٦٠° − قا² ٦٠° + جا٩٠° + ٤ جا٤٥° جتا٤٥°

### الحل

المقدار

= $(\sqrt{٣})^٢ - (٢)^٢ + ١ + ٤ \times \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{١}{\sqrt{٢}}$

$= ٣ - ٤ + ١ + ٤ \times \frac{١}{٢}$

$= ٤ - ٤ + ٢$

$= ٢$

## مثال ١٤

أثبت صحة المتطابقات التالية

(أ) جا ٣٠° جتا ٦٠° + جتا ٣٠° جا ٦٠° = جا ٩٠°

### الحل

الأيمن = جا ٣٠° جتا ٦٠° + جتا ٣٠° جا ٦٠°

$= \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} + \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢}$

$= \frac{١}{٤} + \frac{٣}{٤}$

$= \frac{٤}{٤}$

$= ١$ ← (١)

الأيسر = جا ٩٠° = ١ ← (٢)

من (١)، (٢) ينتج أن الطرفين متساويان

(ب) $\frac{\text{جتا } ٣٠° \text{ جتا } ٤٥° - \text{جا } ٤٥° \text{ جا } ٣٠°}{\text{جا } ٤٥° \text{ جتا } ٣٠° - \text{جتا } ٤٥° \text{ جا } ٣٠°} = ١$

### الحل

الأيمن $= \frac{\text{جتا } ٣٠° \text{ جتا } ٤٥° - \text{جا } ٤٥° \text{ جا } ٣٠°}{\text{جا } ٤٥° \text{ جتا } ٣٠° - \text{جتا } ٤٥° \text{ جا } ٣٠°}$

$= \frac{\frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} - \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{١}{٢}}{\frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} - \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{١}{٢}}$

$= \frac{\frac{\sqrt{٣}}{٢\sqrt{٢}} - \frac{١}{٢\sqrt{٢}}}{\frac{\sqrt{٣}}{٢\sqrt{٢}} - \frac{١}{٢\sqrt{٢}}}$ ∵ البسط = المقام

= ١ = الأيسر

## مثال ١٥

بدون استخدام حاسبة الجيب اوجد قيمة س إذا كان :

(١) س = جتا² ٣٠° ظا² ٣٠° ظا² ٤٥°

### الحل

$س = \left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^٢ \times \left(\frac{١}{\sqrt{٣}}\right)^٢ \times (١)^٢$

∴ $س = \frac{٣}{٤} \times \frac{١}{٣} \times ١$

∴ $س = \frac{١}{٤}$

(٢) س² = ٣ جتا ٦٠° − ٤ جا² ٣٠° + $\frac{١}{٢}$ ظا⁴ ٤٥°

### الحل

∵ س² = ٣ جتا ٦٠° − ٤ جا² ٣٠° + $\frac{١}{٢}$ ظا⁴ ٤٥°

$س^٢ = ٣ \times \frac{١}{٢} - ٤ \times \left(\frac{١}{٢}\right)^٢ + \frac{١}{٢} \times (١)^٤$

∴ $س^٢ = \frac{٣}{٢} - ١ + \frac{١}{٢}$

∴ $س^٢ = ١$

∴ $س = \pm ١$

# تمارين

## ❶ أكمل العبارات الآتية :

① ظتا ٦٠° = ................
② جتا ١٨٠° = ................
③ قتا ٩٠° = ................
④ طا ٣٠° = ................
⑤ جا ٣٠° × جتا ٣٠° = ................
⑥ ظتا² ٣٠° + جا² ٤٥° = ................
⑦ طا ٩٠° = ................
⑧ جتا ٢٧٠° = ................
⑨ إذا كان : س جا ٣٠° + جتا ١٨٠° = ٠ فإن : س = ................
⑩ إذا كان : س² = ٢ جتا ٤٥° جا ٤٥° فإن : س = ................

## ❷ بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة كلاً مما يأتي :

① ٤ جا ٣٠° ظا ٤٥° + ٢ قا² ٤٥° - ظا² ٦٠°
② ٢ جا ٣٠° + ٨ جتا² ٦٠° - ظا ٤٥° جتا ١٨٠°
③ قا ٦٠° - ٤ جا² ٤٥° + جا ٢٧٠°
④ جتا ٩٠° قتا ٣٠° + قا² ٤٥° جا ٣٠° - جتا ٢٧٠° جا ١٨٠°
⑤ جا ٩٠° جتا ٣٠° - جتا ٩٠° جا ٣٠°
⑥ جتا ٩٠° قتا ٣٠° + قا² ٤٥° جا ٣٠° - جتا ٢٧٠° جا ١٨٠°

## ❸ إثبت بدون استخدام الآلة الحاسبة أن :

① جتا ٣٠° جتا ٦٠° - جا ٣٠° جا ٦٠° = جتا ٩٠°
② ٢ جا ٣٠° جتا ٣٠° = جا ٦٠°
③ جتا ٩٠° = جتا² ٤٥° - جا² ٤٥°
④ جا ٩٠° = ٢ جا ٤٥° جتا ٤٥° + ٣ جتا ٢٧٠°
⑤ قتا ٦٠° ظتا ٣٠° ظا ٦٠° = ٢ قا² ٤٥° جتا ٣٠°
⑥ جتا ٦٠° = ٢ جتا² ٣٠° - ١

## ❹ أوجد قيمة س إذا كان :

① س جا² $\frac{\pi}{4}$ جتا $\pi$ = ظا² $\frac{\pi}{3}$ جا $\frac{3\pi}{2}$
② س جا $\frac{\pi}{4}$ جتا $\frac{\pi}{4}$ ظتا $\frac{\pi}{6}$ = ظا² $\frac{\pi}{4}$ - جتا² $\frac{\pi}{3}$

# الزوايا المنتسبة

**الزاويتان المنتسبتان** هما زاويتان مجموع قياسيهما أو الفرق بين قياسيهما عدد صحيح من القوائم

إذا كان: أ ، ب هما قياسا زاويتان منتسبتان

فإن: أ + ب = ٩٠ ن

أو أ − ب = ٩٠ ن

حيث ن عدد صحيح

## ① الزاويتان المنتسبتان θ ، ١٨٠° − θ

إذا كانت الزاوية التي قياسها θ تعين على دائرة الوحدة النقطة ب (س، ص)

فإن الزاوية التي قياسها ١٨٠° − θ تعين على دائرة الوحدة النقطة ب َ(− س، ص)

ويلاحظ أن الزاويتان لهما نفس الإحداثي الصادي فيكون:

جا θ = ص ، جا (١٨٠° − θ) = ص

جا θ = جا (١٨٠° − θ) ، قتا θ = قتا (١٨٠° − θ)

جا زاوية = جا مكملة هذه الزاوية

إذا كان الشكل أ ب حـ ء رباعي دائري

فإن: أ + حـ = ١٨٠°

جا أ = جا حـ ، قتا أ = قتا حـ

**الزاويتان** θ ، ١٨٠ − θ **تعينان** على دائرة الوحدة النقطتان ب (س، ص)

ب َ(− س، ص)

∴ الزاويتان تختلفان في إشارة الإحداثي السيني

∴ حتا θ = س ، حتا (١٨٠° − θ) = − س

فيكون

① حتا θ = − حتا (١٨٠° − θ)

② حتا θ + حتا (١٨٠° − θ) = صفر

③ إذا كان: أ + ب = ١٨٠°

حتا أ + حتا ب = صفر

### مثال ①

إذا كان الشكل أ ب حـ ء رباعي دائري

فإن: $\frac{\text{جا أ}}{\text{جا حـ}} + \frac{\text{قتا ب}}{\text{قتا ء}} = \ldots\ldots\ldots$

أ) ١  ب) −١  ج) ٢  د) صفر

### مثال ②

أكمل: ① جا ٢٠ = جا .......

② قتا ١٠٠° = قتا .......

③ جا ٥٠° − ....... = ٠

④ جا (١٨٠ − θ) − ....... = ٠

## مثال ٣

إذا كان الشكل أ ب حـ ء رباعى دائرى

فإن :

① $\frac{\text{جتا أ}}{\text{جتا حـ}} + \frac{\text{جا ب}}{\text{جا ء}} =$ .............

ⓐ ١ ⓑ -١ ⓒ ٢ ⓓ صفر

② جتا ب = ......

ⓐ جتا ء ⓑ -جتا ء ⓒ جتا حـ ⓓ - جتا حـ

## مثال ٤

إذا كان الشكل أ ب حـ ء متوازى أضلاع

فإن : جتا أ + جتا ب + $\frac{\text{جا حـ}}{\text{جا ء}} =$ ......

## مثال ٥

فى △ أ ب حـ أكمل

① جا (أ + ب) - جا حـ = .......

② جتا (أ + ب) + جتا حـ = .......

③ $\frac{\text{جا (ب + حـ)}}{\text{جا أ}} =$ .......

## مثال ٦

أكمل ما يأتى :

① جتا ١٣٠° + جتا ....° = ٠

② قا ٧٠ + قا ١١٠° = ....

الزاويتان θ ، ١٨٠ - θ تعينان على دائرة الوحدة النقطتان ب (س ، ص) ، بَ (- س ، ص)

∴ الزاويتان تختلفان فى إشارة الإحداثى السينى

∴ طا θ = $\frac{ص}{س}$ ، طا (١٨٠° - θ) = $-\frac{ص}{س}$

فيكون

① طا θ = - طا (١٨٠° - θ)

② طا θ + طا (١٨٠° - θ) = صفر

③ إذا كان : أ + ب = ١٨٠°

، طا أ + طا ب = صفر

طتا أ + طتا ب = صفر

## مثال ٧

أكمل : ① طا ٢٠° + طا .......° = ٠

② جا ١٢٠° = ......

③ جتا ١٥٠° = ......

④ قا ١٣٥° = ......

### الدوال المثلثية للزاويتان : θ ، ١٨٠° - θ

① جتا (١٨٠° - θ) = - جتا θ

② جا (١٨٠° - θ) = جا θ

③ ظا (١٨٠° - θ) = - ظا θ

④ قتا (١٨٠° - θ) = قتا θ

⑤ قا (١٨٠° - θ) = - قا θ

⑥ ظتا (١٨٠° - θ) = - ظتا θ

## مثال (٨)

بدون استخدام الحاسبة أوجد قيمة

جتا ١٢٠° متكاملتان

∵ ١٢٠ ، ٦٠

∴ جتا ١٢٠° = − جتا ٦٠

جتا ١٢٠° = $-\frac{1}{2}$

## حل آخر

∵ ١٢٠° تقع فى الربع الثانى

∴ ١٢٠° = ١٨٠° − ٦٠°

∴ جتا ١٢٠° = جتا (١٨٠° − ٦٠°)

∴ جتا ١٢٠° = − جتا ٦٠°

= $-\frac{1}{2}$

## مثال (٩)

إذا كانت : θ زاوية موجهة فى الوضع القياسى ضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة ($\frac{3}{5}$ ، $\frac{-4}{5}$)

فأكمل ما يأتى

(١) جتا (١٨٠° − θ) = ..................

(٢) جا (١٨٠° − θ) = ..................

(٣) ظا (١٨٠° − θ) = ..................

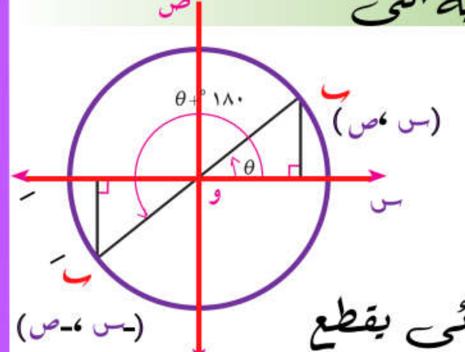
(٤) قتا (١٨٠° − θ) = ..................

(٥) قا (١٨٠° − θ) = ..................

(٦) ظتا (١٨٠° − θ) = ..................

### (٢) الدوال المثلثية للزاويتين: θ ، ١٨٠ + θ

إذا كانت الزاوية التى قياسها θ




ضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة النقطة ب (س ،ص)

فإن الزاوية التى قياسها (١٨٠ + θ)

ضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى

ب َ(− س، − ص)

**ونلاحظ :**

(١) جتا θ = س ، جتا (١٨٠° + θ) = − س

∴ جتا (١٨٠° + θ) = − جتا θ

(٢) جا θ = ص ، جا (١٨٠ + θ) = − ص

∴ جا (١٨٠° + θ) = − جا θ

(٣) ظا θ = $\frac{ص}{س}$ ، ظا (١٨٠° + θ) = $\frac{-ص}{-س}$ = $\frac{ص}{س}$

∴ ظا θ = ظا (١٨٠° + θ)

الخلاصة

إيجاد نسبة مثلثية للزاوية

للزاوية (١٨٠° + θ) =

جا (١٨٠° + θ) = − جا θ

الربع الثالث

إشارة النسبة المثلثية فى هذا الربع

النسبة المثلثية للزاوية

## مثال ١٠

إذا كانت: θ زاوية موجهة في الوضع القياسي ضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في النقطة $(\frac{-٥}{١٣} ، \frac{١٢}{١٣})$

فأكمل ما يأتي

١) جتا (١٨٠° + θ) = ..............................

٢) جا (١٨٠° + θ) = ..............................

٣) ظا (١٨٠° + θ) = ..............................

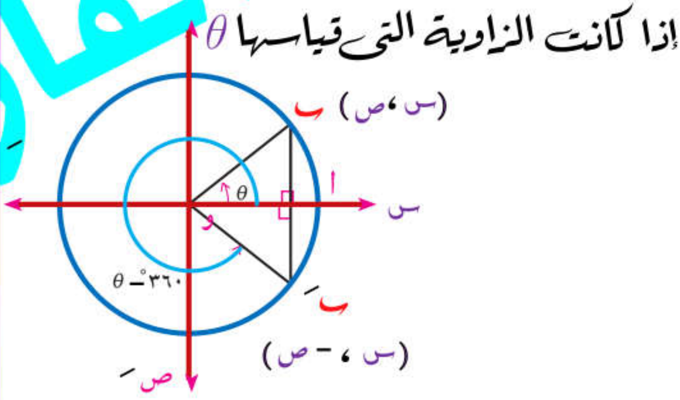
٤) قتا (١٨٠° + θ) = ..............................

٥) قا (١٨٠° + θ) = ..............................

٦) ظتا (١٨٠° + θ) = ..............................

### ٣ الدوال المثلثية للزاويتين: θ ، ٣٦٠° − θ

إذا كانت الزاوية التي قياسها θ




ضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة النقطة ب (س ، ص)

فإن الزاوية التي قياسها (٣٦٠° − θ) ضلعها النهائي يقطع دائرة الوحدة في ب′ (س ، −ص)

ونلاحظ أن:

١) جتا θ = س ، جتا (٣٦٠ − θ) = س

∴ جتا (٣٦٠° − θ) = جتا θ

٢) جا θ = ص ، جا (٣٦٠° − θ) = −ص

∴ جا (٣٦٠° − θ) = − جا θ

٣) طا θ = $\frac{ص}{س}$ ، طا (١٨٠° + θ) = $\frac{-ص}{س}$

∴ طا θ = − طا (٣٦٠° − θ)

٤

### الدوال المثلثية للزاويتين: θ ، ٣٦٠ − θ

١) جتا (٣٦٠° − θ) = − جتا θ

٢) جا (٣٦٠° − θ) = − جا θ

٣) ظا (٣٦٠° − θ) = − ظا θ

٤) قتا (٣٦٠° − θ) = − قتا θ

٥) قا (٣٦٠° − θ) = قا θ

٦) ظتا (٣٦٠° − θ) = − ظتا θ

**ملحوظة**

مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي أ ب حـ ء يساوي ٣٦٠°

∴ أ + ب + حـ + ء = ٣٦٠°

∴ أ + ب + حـ = ٣٦٠° − ء

∴ جتا (أ + ب + حـ) = جتا (٣٦٠° − ء)

= جتا ء

## مثال ١١

في أي شكل رباعي أ ب ج د يكون

$\frac{\text{طا}(أ+ب+ج)}{\text{طا } د} + \frac{\text{جا } ب}{\text{جا}(أ+ج+د)} = \ldots$

## مثال ١٢

بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة:

١) جا ٣٠٠°

### الحل

∵ ٣٠٠° تقع في الربع الرابع

∴ ٣٠٠° = ٣٦٠° − ٦٠°

∴ جا ٣٠٠° = جا (٣٦٠° − ٦٠°) = − جا ٦٠°

= $\sqrt{٣}$

٢) طا ٣٣٠°

### الحل

∵ ٣٣٠° تقع في الربع الرابع

∴ ٣٣٠° = ٣٦٠° − ٣٠°

∴ طا ٣٣٠° = طا (٣٦٠° − ٣٠°) = − طا ٣٠°

= $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

٣) قا ٣١٥°

### الحل

∵ ٣١٥° تقع في الربع الرابع

∴ ٣١٥° = ٣٦٠° − ٤٥°

∴ قا ٣١٥° = قا (٣٦٠° − ٤٥°) = قا ٤٥°

= $\sqrt{٢}$

٤) طا ٢١٠°

### الحل

∵ ٢١٠° تقع في الربع الثالث

∴ ٢١٠° = ١٨٠° + ٣٠°

∴ طا ٢١٠° = طا (١٨٠° + ٣٠°) = طا ٣٠°

= $\frac{١}{\sqrt{٣}}$

٥) قتا ١٥٠°

### الحل

∵ ١٥٠° تقع في الربع الثاني

∴ ١٥٠° = ١٨٠° − ٣٠°

∴ قتا ١٥٠° = قتا (١٨٠° − ٣٠°) = قتا ٣٠°

= ٢

٦) حتا ٢٤٠°

### الحل

∵ ٢٤٠° تقع في الربع الثالث

∴ ٢٤٠° = ١٨٠° + ٦٠°

∴ حتا ٢٤٠° = حتا (١٨٠° + ٦٠°) = − حتا ٣٠°

= $-\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

## مثال ١٣

بدون استخدام الآلة الحاسبة أثبت أن:

جا ٦٠٠° حتا (−٣٠°) + جا ١٥٠° حتا (−٢٤٠°) = −١

## الحل

$600^\circ$ ، $(-30^\circ)$ ، $(-240^\circ)$

$600 = 240 + 360$

∴ الزاوية التى قياسها $240^\circ$

تكافئ زاوية قياسها $240$

$(-30)^\circ$ قياسها الموجب هو $330^\circ$

$(-240)^\circ$ قياسها الموجب هو $120^\circ$

الأيمن

= جا $600^\circ$ جتا $(-30^\circ)$ + جا $150^\circ$ جتا $(-240^\circ)$

= جا $240^\circ$ جتا $330^\circ$ + جا $150^\circ$ جتا $120^\circ$

= جا $(180^\circ + 60^\circ)$ جتا $(360^\circ - 30^\circ)$ +
جا $(180^\circ - 30^\circ)$ جتا $(180^\circ - 60^\circ)$

= − جا $60^\circ$ جتا $30^\circ$ + جا $30^\circ$ (− جتا $60^\circ$)

$= -\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$

$= -\frac{3}{4} - \frac{1}{4}$

$= -1$

= الايسر

### تدريب

بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد

قيمة : قتا $\frac{5\pi}{3}$

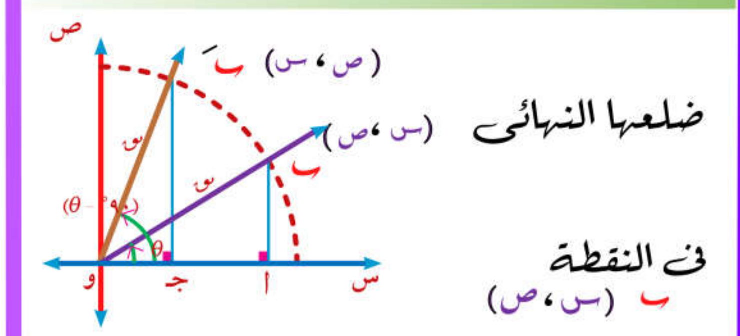
### مثال

## ٤ الدوال المثلثية للزاويتان $\theta$ ، $90 - \theta$

إذا كانت الزاوية الموجهة التى قياسها $\theta$

ضلعها النهائى (س، ص)

فى النقطة ب (س، ص)




فإن الزاوية التى قياسها $90^\circ - \theta$

ضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة

فى النقطة ب´ (ص، س)

**ونلاحظ :**

① جتا $\theta$ = س ، جا $(90^\circ - \theta)$ = س

∴ جا $(90^\circ - \theta)$ = جتا $\theta$

② جا $\theta$ = ص ، جتا $(90^\circ - \theta)$ = ص

∴ جتا $(90^\circ - \theta)$ = جا $\theta$

③ طا $\theta$ = $\frac{ص}{س}$ ، طتا $(90 - \theta)$ = $\frac{ص}{س}$

∴ طتا $(90 - \theta)$ = طا $\theta$

لأى زاويتين متتامتين أ ، ب فإن

| | |
|---|---|
| ■ جتا أ = جا ب | ■ قا أ = قتا ب |
| ■ جا أ = جتا ب | ■ قتا أ = قا ب |
| ■ طا أ = طتا ب | ■ طتا أ = طا ب |

الزاويتان : $20^\circ$ ، $70^\circ$

هما زاويتان متتامتان

$\therefore$ جتا ٢٠° = جا ٧٠°

جا ٢٠° = جتا ٧٠°

مثال ١٤

أكمل

① جتا ٥٠° − جا ٤٠° = ......

② $\frac{\text{قا } ٨٠°}{\text{قتا } ١٠°} - \frac{\text{ظا } ١٥°}{\text{ظتا } ٧٥°}$ = ......

③ جتا ٢٠° جتا ٢٠° − جا ٧٠° جا ٧٠° =

## ٥ الدوال المثلثية للزاويتان $\theta$ ، ٩٠ + $\theta$

إذا كان الضلع النهائى للزاوية الموجهة التى قياسها $\theta$ يقطع دائرة الوحدة فى النقطة ب (س ،ص)

فإن الزاوية التى قياسها ٩٠° + $\theta$ ضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة ب َ(− ص، س)

### الدوال المثلثية للزاويتان: $\theta$ ، ٩٠° + $\theta$

جا (٩٠° + $\theta$) = جتا $\theta$ ، قتا (٩٠° + $\theta$) = قا $\theta$

جتا (٩٠° + $\theta$) = − جا $\theta$ ، قا (٩٠° + $\theta$) = − قتا $\theta$

ظا (٩٠° + $\theta$) = − ظتا $\theta$ ، ظتا (٩٠° + $\theta$) = − ظا $\theta$

مثال ١٥

إذا كانت : $\theta$ زاوية موجهة فى الوضع القياسى ضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة ($\frac{-٥}{١٣}$ ، $\frac{١٢}{١٣}$)

فأكمل ما يأتى

① جتا (٩٠ + $\theta$) = ......

② جا (٩٠ + $\theta$) = ......

③ ظا (٩٠ + $\theta$) = ......

④ قتا (٩٠ + $\theta$) = ......

⑤ قا (٩٠ + $\theta$) = ......

⑥ ظتا (٩٠ + $\theta$) = ......

تدريب

بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد

① جتا ١٢٠ =

② جا ١٥٠ =

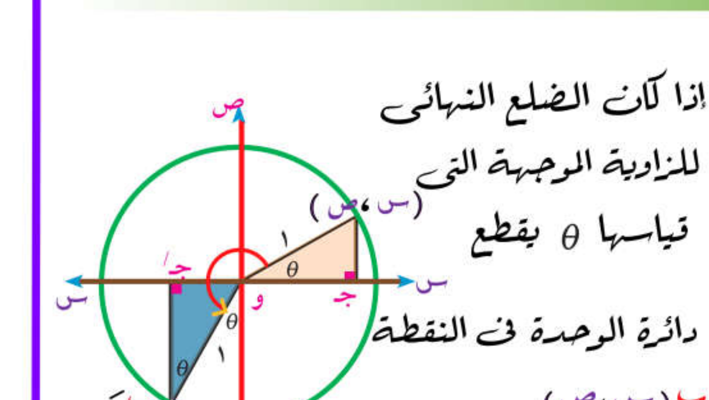
③ ظا ١٣٥ =

④ قتا ١٢٠ =

⑤ قا ١٥٠ =

⑥ ظتا ١٣٥ =

## ٦ الدوال المثلثية للزاويتان: $\theta$ ، ٢٧٠ $- \theta$




إذا كان الضلع النهائى للزاوية الموجهة التى قياسها $\theta$ يقطع دائرة الوحدة فى النقطة ب (س ،ص)

فإن الزاوية التى قياسها ٢٧٠° $- \theta$ ضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة ب َ(ـ ص ، ـ س)

### الدوال المثلثية للزاويتان: $\theta$ ، ٢٧٠° $- \theta$

حا (٢٧٠° $- \theta$) = ـ جتا $\theta$

جتا (٢٧٠° $- \theta$) = ـ جا $\theta$

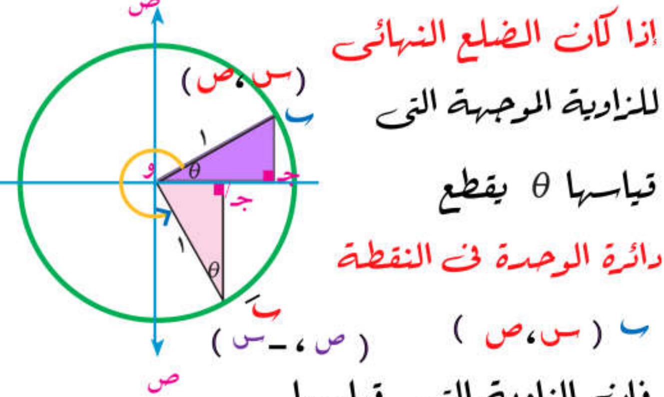
طا (٢٧٠° $- \theta$) = ظتا $\theta$

قتا (٢٧٠° $- \theta$) = ـ قا $\theta$

قا (٢٧٠° $- \theta$) = ـ قتا $\theta$

طتا (٢٧٠° $- \theta$) = ظا $\theta$

## ٧ الدوال المثلثية للزاويتان: $\theta$ ، ٢٧٠ $+ \theta$




إذا كان الضلع النهائى للزاوية الموجهة التى قياسها $\theta$ يقطع دائرة الوحدة فى النقطة ب (س ،ص)

فإن الزاوية التى قياسها ٢٧٠° $+ \theta$ ضلعها النهائى يقطع دائرة الوحدة فى النقطة ب َ( ص ، ـ س)

### الدوال المثلثية للزاويتان: $\theta$ ، ٢٧٠° $+ \theta$

حا (٢٧٠° $+ \theta$) = ـ جتا $\theta$

جتا (٢٧٠° $+ \theta$) = جا $\theta$

طا (٢٧٠° $+ \theta$) = ـ ظتا $\theta$

قتا (٢٧٠° $+ \theta$) = ـ قا $\theta$

قا (٢٧٠° $+ \theta$) = قتا $\theta$

طتا (٢٧٠° $+ \theta$) = ظا $\theta$

## ٨ الدوال المثلثية للزاويتين ($\theta$ ، $-\theta$ )

① جتا ($-\theta$) = جتا $\theta$

② جا ($-\theta$) = ـ جا $\theta$

③ قا ($-\theta$) = قا $\theta$

④ قتا ($-\theta$) = ـ قتا $\theta$

⑤ ظا ($-\theta$) = ـ ظا $\theta$

⑥ ظتا ($-\theta$) = ـ ظتا $\theta$

## ملاحظات

١

الزوايا التي لها القياس : $\theta$ ، (٩٠° $- \theta$) تقع في الربع الأول

الزوايا التي لها القياس: (٩٠° $+ \theta$) ،(١٨٠° $- \theta$) تقع في الربع الثاني

الزوايا التي لها القياس: (١٨٠ $+ \theta$) ،(٢٧٠ $- \theta$) تقع في الربع الثالث

الزوايا التي لها القياس (٢٧٠° $+ \theta$) ، (٣٦٠° $- \theta$)،($-\theta$ ) تقع في الربع الرابع.

٢

**الزوايا التي قياسها:** $\theta$ ، $(180° - \theta)$ ، $(180° + \theta)$ ، $(360° - \theta)$ ، $(-\theta)$

تكون نفس الدالة المثلثية لها جميعاً متساوية من حيث القيمة العددية فقط وتختلف فقط في الإشارة حسب الربع الذي تقع فيه كل منها

==========================

٣

**الزوايا التي قياسها:**

$(90° - \theta)$ ، $(90° + \theta)$

، $(270° - \theta)$ ، $(270° + \theta)$

تتغير فيها الدالة المثلثية للزاوية التي قياسها " $\theta$ " بوضع حرف ( ت ) في الدالة التي ليس بها حرف (ت) - أو بحذف حرف ( ت ) من الدالة التي بها حرف (ت)

: (جتا ) تصبح (جا)، (قتا ) تصبح (قا) وتختلف في الإشارة حسب الربع الذي تقع فيه الزاوية قبل تغيير الدالة المثلثية

==========================

## مثال ١٦

بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة

جتا ١٢٠° ظا ٣١٥° + جا ٢٤٠° ظا ٣٠٠°




## الحل

جتا ١٢٠° = جتا (١٨٠° − ٦٠°) = − جتا ٦٠° = $-\frac{1}{2}$

ظا ٣١٥° = ظا (٣٦٠° − ٤٥°) = − ظا ٤٥° = −١

جا ٢٤٠° = جا (١٨٠° + ٦٠°) = − جا ٦٠° = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

ظا ٣٠٠° = ظا (٣٦٠° − ٦٠°) = − ظا ٦٠° = $-\sqrt{3}$

∴ جتا ١٢٠° ظا ٣١٥° + جا ٢٤٠° ظا ٣٠٠°

$= (-\frac{1}{2} \times -1) + (-\frac{\sqrt{3}}{2} \times -\sqrt{3}) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2$

==========================

# حل المعادلات المثلثية البسيطة

١ **إذا كان : جا α = جتا β فإن :**

- $\alpha \pm \beta = 90° + 360°$ ن
- أ، $\alpha \pm \beta = \frac{\pi}{2} + 2\pi$ ن

حيث ن عدد صحيح

==========================

٢ **إذا كان : قتا α = قا β فإن:**

- $\alpha \pm \beta = 90° + 360°$ ن
- أ، $\alpha \pm \beta = \frac{\pi}{2} + 2\pi$ ن

حيث ن عدد صحيح

==========================

٣ **إذا كان : ظا α = ظتا β فإن :**

- $\alpha + \beta = 90° + 180°$ ن
- أ، $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} + \pi$ ن

حيث ن عدد صحيح

## مثال ١٧

أوجد الحل العام لكل من المعادلات الآتية

ثم أوجد قيم $\theta$ حيث $\theta \in ]\,٠ ، \frac{\pi}{٢}\,[$

**①** جا٤$\theta$ = جتا٢$\theta$

### الحل

∴ $٢\theta \pm ٤\theta = \frac{\pi}{٢} + ٢\pi$ ن

| | |
|---|---|
| $٤\theta + ٢\theta = \frac{\pi}{٢} + ٢\pi$ ن | $٤\theta - ٢\theta = \frac{\pi}{٢} + ٢\pi$ ن |
| ∴ $٦\theta = \frac{\pi}{٢} + ٢\pi$ ن | $٢\theta = \frac{\pi}{٢} + ٢\pi$ ن |
| بالقسمة على ٦ للطرفين | بالقسمة على ٢ للطرفين |
| ∴ $\theta = \frac{\pi}{١٢} + \frac{\pi}{٣}$ ن | ∴ $\theta = \frac{\pi}{٤} + \pi$ ن |

الحل العام هو :

$\theta = \frac{\pi}{١٢} + \frac{\pi}{٣}$ ن أو $\theta = \frac{\pi}{٤} + \pi$ ن

لإيجاد قيم $\theta$

| | |
|---|---|
| بوضع ن = ٠ | |
| ∴ $\theta = \frac{\pi}{١٢}$ = °١٥ | $\theta = \frac{\pi}{٤}$ = °٤٥ |
| بوضع ن = ١ | |
| ∴ $\theta = \frac{\pi}{١٢} + \frac{\pi}{٣}$ | $\theta = \frac{\pi}{٤} + \pi$ |
| = °١٥ + °٦٠ | $\theta$ = °٤٥ + °١٨٠ |
| = °٧٥ | = °٢٢٥ |
| بوضع ن = ٢ | مرفوض |
| $\theta = \frac{\pi}{١٢} + \frac{\pi}{٣} \times ٢$ | لأن $\theta \in ]\,٠ ، \frac{\pi}{٢}\,[$ |
| = °١٥ + °١٢٠ | |
| = ١٣٥ مرفوض | |

∴ $\theta \in$ { °١٥ ، °٤٥ ، °٧٥ }

**②** ظا (٢$\theta$ − °١٠) = ظتا (٣$\theta$ + °٢٠)

### الحل

(٢$\theta$ − °١٠) + (٣$\theta$ + °٢٠) = °٩٠ + °١٨٠ ن

∴ ٥$\theta$ + °١٠ = °٩٠ + °١٨٠ ن

∴ ٥$\theta$ = ٨٠ + °١٨٠ ن

بالقسمة على الطرفين

∴ الحل العام هو : $\theta$ = °١٦ + °٣٦ ن

بوضع ن = ٠ ∴ $\theta$ = °١٦

بوضع ن = ١ ∴ $\theta$ = °١٦ + °٣٦

∴ $\theta$ = ٥٢

بوضع ن = ٢

∴ $\theta$ = °١٦ + °٣٦ × ٢

∴ $\theta$ = °٨٨

بوضع ن = ٣

∴ $\theta$ = °١٦ + °٣٦ × ٣

= °١٦ + °١٠٨

= ١٢٤ مرفوض

لأن $\theta \in ]\,٠ ، \frac{\pi}{٢}\,[$

∴ $\theta \in$ { °١٦ ، °٥٢ ، °٨٨ }





③ قتا ٥θ = قا(θ + ٣٠°)

**الحل**

٥θ ± (θ + ٣٠°) = ٩٠° + ٣٦٠° ن

| | |
|---|---|
| ٦θ + ٣٠° = ٩٠° + ٣٦٠° ن | ٥θ − (θ + ٣٠°) = ٩٠° + ٣٦٠° ن |
| ٦θ = ٦٠° + ٣٦٠° ن | ٤θ − ٣٠° = ٩٠° + ٣٦٠° ن |
| | ٤θ = ١٢٠° + ٣٦٠° ن |
| بالقسمة على ٦ للطرفين | بالقسمة على ٤ للطرفين |
| ∴ θ = ١٠° + ٦٠° ن | ∴ θ = ٣٠° + ٩٠° ن |
| بوضع ن = ٠ | بوضع ن = ٠ |
| ∴ θ = ١٠° | ∴ θ = ٣٠° |
| بوضع ن = ١ | بوضع ن = ١ |
| θ = ١٠° + ٦٠° = ٧٠° | ∴ θ = ٣٠° + ٩٠° = ١٢٠° مرفوض |
| بوضع ن = ٢ | |
| ∴ θ = ١٣٠ مرفوض | |

∴ θ ∈ {١٠°، ٣٠°، ٧٠°}

---

## مثال ١٧

أوجد مجموعة حل المعادلات الأتية حيث θ ∈ [٠، ٢ط]

① √٣ ظا θ = ١

∵ √٣ ظا θ = ١

ظا θ = ١/√٣ > صفر

θ تقع في الربع الأول او الثالث

θ = ٣٠° | θ = ١٨٠° + ٣٠° = ٢١٠°

م.ح = {٣٠°، ٢١٠°}

---

② ٢ جا θ − ١ = صفر

**الحل**

جا θ = ١/٢ > صفر

θ تقع في الربع الأول او الثاني

θ = ٣٠° | θ = ١٨٠° − ٣٠° = ١٥٠°

م.ح = {٣٠°، ١٥٠°}

---

③ جا θ جتا θ = صفر

**الحل**

| جا θ = صفر | جتا θ = صفر |
|---|---|
| θ = ٠°، أ ١٨٠° | θ = ٩٠°، أ ٢٧٠° |

م.ح = {٠°، ٩٠°، ١٨٠°، ٢٧٠°}

---

٢ جتا θ + ١ = صفر

θ تقع في الربع الثاني او الثالث

| | |
|---|---|
| θ = ١٨٠° − ٦٠° | θ = ١٨٠° + ٦٠° |
| = ١٢٠° | = ٢٤٠° |

م.ح = {١٢٠°، ٢٤٠°}



## تمارين (١٢)

### ١ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان : ٥ جتا (٩٠° − θ) = ٤ ، ٠° < θ < ٩٠° فإن : جا θ = ..........

(أ) $\frac{٥}{٤}$ (ب) $\frac{-٣}{٥}$ (جـ) $\frac{٤}{٥}$ (د) $\frac{٣}{٥}$

② إذا كانت : ظتا (٩٠° + θ) + ١ = ٠ حيث ٠° < θ < ٩٠° فإن : جتا ٤ θ = ..........

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ١ (جـ) صفر (د) −١

③ إذا كان : جتا (٩٠° + θ) + جا (٩٠° − ٢ θ) = ٠ حيث θ ∈ ]٠ ، $\frac{\pi}{٤}$[

فإن : جا ٢ θ = ..........

(أ) $\frac{١}{٢}$ (ب) ١ (جـ) صفر (د) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

④ إذا كان : جتا (٢٧٠° − θ) = $\frac{١}{٢}$ حيث θ قياس أصغر زاوية موجبة

فإن : θ = ..........

(أ) ٣٠° (ب) ١٥٠° (جـ) ٢١٠° (د) ٣٣٠°

⑤ إذا كان : ظا θ = $\frac{-٥}{١٢}$ ، جتا θ < ٠ فإن : قتا θ = ..........

(أ) $\frac{٥}{١٣}$ (ب) $\frac{-٥}{١٣}$ (جـ) $\frac{١٣}{٥}$ (د) $\frac{-١٣}{٥}$

⑥ إذا كان : جا θ = $\frac{-١}{٢}$ ، ظا θ > ٠ فإن : θ = ..........

(أ) ٣٠° (ب) ١٥٠° (جـ) ٢١٠° (د) ٣٣٠°

### ٢ إذا كان جتا θ = $-\frac{٣}{٥}$ حيث ١٨٠° < θ < ٢٧٠° فأوجد قيمة كل من :

| | | |
|---|---|---|
| ① قا (١٨٠° + θ) | ② قا (− θ) | ③ ظا (٣٦٠° − θ) |
| ④ ظا (θ − ٩٠°) | ⑤ قا (٩٠° + θ) | ⑥ ظا (٢٧٠° − θ) |
| ⑦ ظا (٢٧٠° + θ) | | |

### ٣ أوجد الحل العام لكل من المعادلات الآتية :

① جا ٢ θ = جتا θ

② جتا ٥ θ = جا θ



## ٤ اختر الإجابة الصحيحة من بين الإجابات المعطاة :

① إذا كان : جا θ = جتا ٢ θ ، θ ∋ ]٠ ، $\frac{\pi}{2}$[ فإن : جا ٣ θ = ..........

(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) ١ (جـ) صفر (د) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

② إذا كان : ظا θ = ظتا ٢ θ ، ٠° < θ < ٩٠° فإن : جا θ + جتا ٢ θ = ..........

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) ٢ (د) $\frac{1}{4}$

③ 📖 إذا كان : جا α = جتا β فإن : ظا (α + β) = ..........

(أ) ١ (ب) −١ (جـ) غير معرف (د) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

④ 📖 إذا كان : جا ٢ θ = جتا ٤ θ حيث θ زاوية حادة موجبة

فإن : ظا (٩٠° − ٣ θ) = ..........

(أ) −١ (ب) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (جـ) ١ (د) $\sqrt{3}$

---

## ٥ أوجد قيمة كل مما يأتي :

① جتا ١٢٠° + ظا ٢٢٥° + قتا ٣٣٠° + جتا ٤٢٠°

② جا ٤٢٠° ظا ٣٣٠° + جتا (−١٢٠°) قتا ٢١٠°

③ جا ٣٩٠° جتا (−٦٠°) + جتا ٣٠° جا ١٢٠°

④ جا ٦٩٠° جتا (−٢٤٠°) + جا ٥١٠° ظا ٨٥٥°

⑤ 📖 جا ١٥٠ جتا (−٣٠٠°) + جتا ٩٣٠° ظتا ٢٤٠°

⑥ جا ١٥٠° جتا (− ٦٠°) + جا ٣٠٠° جا (− ١٢٠°)

⑦ ظا $\frac{2\pi}{3}$ قا $\frac{11\pi}{3}$ + ظتا $\frac{11\pi}{6}$ قتا $\frac{19\pi}{6}$ + ظا $\frac{25\pi}{6}$ قتا $\left(\frac{-19\pi}{3}\right)$

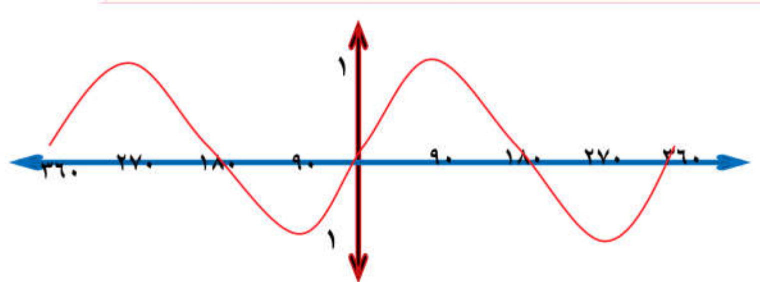
# التمثيل البياني للدوال المثلثية

## دالة الجيب

**عند تمثيل الدالة د :** د($\theta$) = جا $\theta$

| $\theta$ | ٠ | ٣٠ | ٦٠ | ٩٠ | ١٢٠ | ١٥٠ | ١٨٠ | ٢١٠ | ٢٤٠ | ٢٧٠ | ٣٠٠ | ٣٣٠ | ٣٦٠ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| جا $\theta$ | ٠ | ٠,٥ | ٠,٨٧ | ١ | ٠,٨٧ | ٠,٥ | ٠ | −٠,٥ | −٠,٨٧ | −١ | −٠,٨٧ | −٠,٥ | ٠ |

نحصل على المنحنى المقابل



① مدى الدالة هو الفترة [−١، ١]

② مجال الدالة هو ح

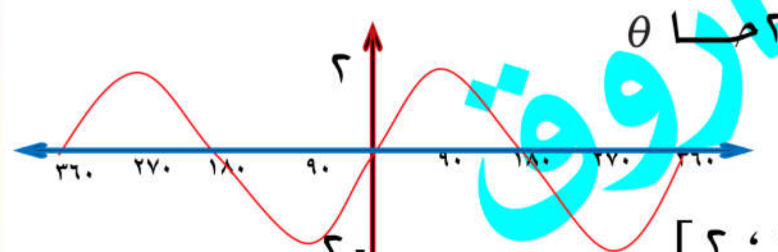
③ الدالة دورية دورتها = ٢ $\pi$

④ القيمة العظمى للدالة = ١ وتبلغها عند $\theta$ = ٩٠° + ٣٦٠° ن ، ن ∈ ص

⑤ القيمة الصغرى للدالة = −١ وتبلغها عند $\theta$ = ٢٧٠° + ٣٦٠° ن ، ن ∈ ص

---

**عند تمثيل الدالة د :** د($\theta$) = ٢جا $\theta$



نلاحظ أن :

① مدى الدالة هو الفترة [−٢ ، ٢]

② القيمة العظمى للدالة = ٢ وتبلغها عند $\theta$ = ٩٠° + ٣٦٠° ن ، ن ∈ ص

⑤ القيمة الصغرى للدالة = −٢ وتبلغها عند $\theta$ = ٢٧٠° + ٣٦٠° ن ، ن ∈ ص

**ملحوظة**

■ إذا كانت د($\theta$) = أ جا $\theta$ ، أ > ٠ فإن

① مدى الدالة هو الفترة [−أ ، أ]

② القيمة العظمى = أ

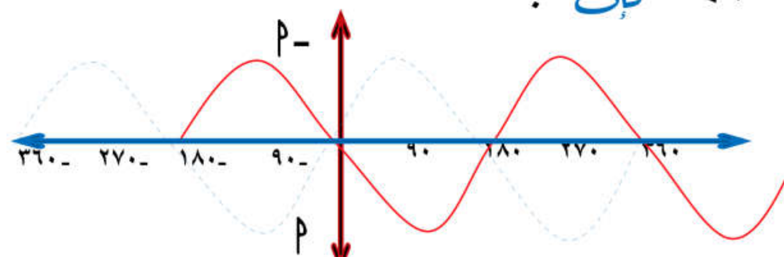
③ القيمة الصغرى = −أ

④ الدالة دورية و دورتها = ٢ $\pi$

■ إذا كانت د($\theta$) = جا ب $\theta$ فإن :

الدالة دورية ودورتها = $\frac{2\pi}{|ب|}$

إذا كانت د$(\theta)$ = −أ حا $\theta$ ، أ > ٠ فإن :




١) هو نفس منحنى الدالة ص = أ حا $\theta$ بالإنعكاس في محور السينات

٢) المنحنى يبلغ القيمة العظمى = أ عندما $\theta$ = ٢٧٠° + ٣٦٠° ن

٣) القيمة الصغرى = −أ عندما $\theta$ = ٩٠° + ٣٦٠° ن

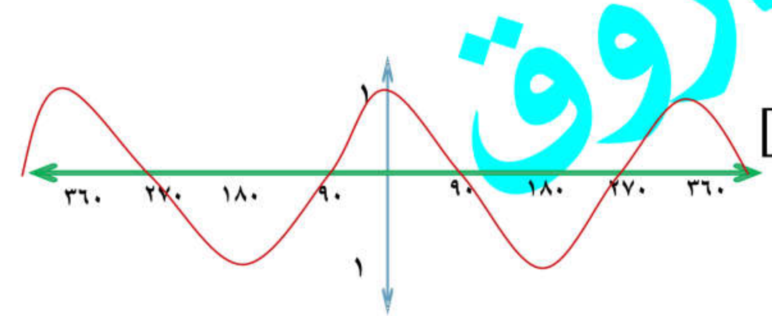
٤) الدالة دورية و دورتها = ٢$\pi$

## دالة جيب التمام

**عند تمثيل الدالة د : د$(\theta)$ = حتا $\theta$**

| $\theta$ | ٠ | ٣٠ | ٦٠ | ٩٠ | ١٢٠ | ١٥٠ | ١٨٠ | ٢١٠ | ٢٤٠ | ٢٧٠ | ٣٠٠ | ٣٣٠ | ٣٦٠ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| حتا $\theta$ | ١ | ٠,٨٧ | ٠,٥ | ٠ | −٠,٥ | −٠,٨٧ | −١ | −٠,٨٧ | −٠,٥ | ٠ | ٠,٥ | ٠,٨٧ | ١ |

نحصل على المنحنى المقابل

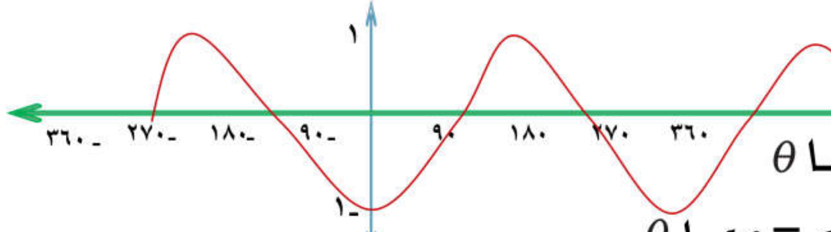




- مدى الدالة هو الفترة [−١ ، ١]


- مجال الدالة هو ح
- الدالة دورية دورتها = ٢$\pi$
- القيمة العظمى للدالة = ١ عند $\theta$ = ٣٦٠° ن ، ن ∈ ص
- القيمة الصغرى للدالة = −١ عند $\theta$ = ١٨٠° + ٣٦٠° ن ، ن ∈ ص

## ملحوظة




منحنى الدالة د : د$(\theta)$ = − حتا $\theta$

هو نفس منحنى الدالة : ص = حتا $\theta$

بالإنعكاس في محور السينات

من منحنى الدالة د :

$د(\theta) = - جتا \theta$

(١) القيمة العظمى للدالة = ١

وتبلغها الدالة عند :

$\theta = ١٨٠^\circ + ٣٦٠^\circ ن$ ، ن ∈ ص

(٢) القيمة الصغرى للدالة = −١

وتبلغها الدالة عند :

$\theta = ٣٦٠^\circ ن$ ، ن ∈ ص

## ملاحظات على دالتي الجيب وجيب التمام

$د(\theta) = أ جا ب \theta$ ، $د(\theta) = أ جتا ب \theta$ دالة دورية

- المدى = [ − أ، أ]
- الدورة = $\frac{٢\pi}{|ب|}$

**مثال (١)**

أوجد القيمة العظمى والقيمة الصغرى والمدى والدورة لكل من الدوال الآتية

(١) ص = جا $\theta$

**الحل**

ص = جا $\theta$　　أ = ١ ، ب = ١

القيمة العظمى = أ = ١

= − أ = −١

المدى = [ − أ، أ ] = [ − ١، ١]

الدورة = $\frac{٢\pi}{|ب|} = ٢\pi$

(٢) ص = ٣ جتا $\theta$

**الحل**

أ = ٣، ب = ١

القيمة العظمى = أ = ٣

القيمة الصغرى = − أ = −٣

المدى = [−أ، أ] = [−٣، ٣]

الدورة = $\frac{٢\pi}{|ب|} = ٢\pi$

(٣) ص = ٥ جا ٣ $\theta$

**الحل**

أ = ٥ ، ب = ٣

القيمة العظمى = أ = ٥

القيمة الصغرى = − أ = −٥

القيمة الصغرى = [−أ، أ] = [−٥، ٥]

الدورة = $\frac{٢\pi}{|ب|} = \frac{٢\pi}{٣}$

❶ أكمل العبارات الآتية:

① مدى الدالة د حيث د$(\theta)$ = جا $\theta$ هو ..............

② مدى الدالة ن حيث ن $(\theta)$ = ٢ جا $\theta$ هو ..............

③ مدى الدالة ع حيث ع$(\theta)$ = ٤ جتا $\theta$ هو ..............

④ القيمة الصغرى للدالة ت حيث ت$(\theta)$ = ٥ جتا $\theta$ هي ..............

⑤ دورة الدالة هـ$(\theta)$ حيث هـ$(\theta)$ = جا ٨ $\theta$ هي ..............

⑥ القيمة العظمى للدالة م حيث م$(\theta)$ = - ٣ جتا $\theta$ هي ..............

❷ أوجد القيمة العظمى و الصغرى للدالة د وأكتب المدى في كل مما يأتي:

① د $(\theta)$ = ٨ جا $\theta$

② د $(\theta)$ = - جا $\theta$

③ د $(\theta)$ = ٣ جتا $\theta$

④ د $(\theta)$ = ٦ جتا $\theta$

⑤ د $(\theta)$ = ٤ جتا $\theta$

⑥ د $(\theta)$ = - ٢ جا $\theta$

❸ أوجد المدى والدورة للدالة د في كل مما يأتي:

① د $(\theta)$ = ٢ جتا ٤ $\theta$

② د $(\theta)$ = ٩ جتا ٩ $\theta$

③ د $(\theta)$ = ٥ جا ٦ $\theta$

④ د $(\theta)$ = ٦ جا ٥ $\theta$

⑤ د $(\theta)$ = ٤ جتا ٢ $\theta$

⑥ د $(\theta)$ = - ٢ جتا $\pi$ $\theta$



..............................................................................

# إيجاد قياس زاوية إذا علم إحدى نسبها المثلثية

إذا كانت: حا $\theta$ = م فيمكن كتابتها بصورة أخرى مكافئة هى

$\theta$ = حا$^{-1}$ م

فمثلا :

إذا كان : حا $\theta$ = $\frac{1}{2}$

فيمكن كتابتها على الصورة

$\theta$ = حا$^{-1}$ $(\frac{1}{2})$

ويقصد بذلك إيجاد الزاوية التى جيبها = $\frac{1}{2}$

==============================

**مثال ١**

أوجد " $\theta$ " حيث ٠° < $\theta$ < ٣٦٠° والتي تحقق أن :

① $\theta$ = جتا$^{-1}$ $(\frac{1}{2})$

**الحل**

نوجد زاوية حادة جيب تمامها = $\frac{1}{2}$

∴ الزاوية الحادة هى ٦٠°

من اشارة النسبة المثلثية نحدد ربعين تقع فيهم الزاوية



فإذا كانت الزاوية تقع فى



∵ جتا $\theta$ موجبة

∴ تقع فى الربع الأول أو الرابع

| فى الرابع | فى الأول |
|---|---|
| $\theta$ = ٣٦٠° ـ الحادة | $\theta$ = الحادة |
| $\theta$ = ٣٦٠° ـ ٦٠° | ∴ $\theta$ = ٦٠° |
| $\theta$ = ٣٠٠° | |

==============================

② $\theta$ = جا$^{-1}$ (– ٠,٦٨٧٤)

**الحل**

الزاوية الحادة التى جيبها = ٠,٦٨٧٤

هى ٢٩° ٢٥َ ٤٣ً

$\theta$ = جا$^{-1}$ (– ٠,٦٨٧٤) < صفر

$\theta$ تقع

في الربع الثالث

$\theta$ = ١٨٠° + ٢٩° ٢٥َ ٤٣ً = ٢٠٩° ٢٥َ ٤٣ً

أو الرابع

$\theta = 360^\circ - 43^\circ\ 25'\ 29'' = 316^\circ\ 34'\ 31''$

==============================

**ملحوظة**

إذا علم إحدى النسب للزاوية المثلثية

نرسم الزاوية فى الوضع القياسى

ثم نرسم المثلث القائم الخاص بها فى

هذا الربع موزعا عليه الإشارات

ثم نوجد الضلع المجهول من نظرية فيثاغورث

① إذا كانت θ تقع فى الربع الأول

(+ ، + ، θ ، +)

② إذا كانت θ تقع فى الربع الثانى

(+ ، + ، θ ، −)

③ إذا كانت θ تقع فى الربع الثالث

(− ، − ، θ ، +)

④ إذا كانت θ تقع فى الربع الرابع

(+ ، θ ، + ، −)



## مثال ①

إذا كانت : ١٢ ظا α − ٥ = ٠

حيث α أكبر زاوية موجبة ،

٢٥ جا β − ٢٤ = ٠ حيث

β ∈ ]٩٠°، ١٨٠°[ فأوجد قيمة المقدار

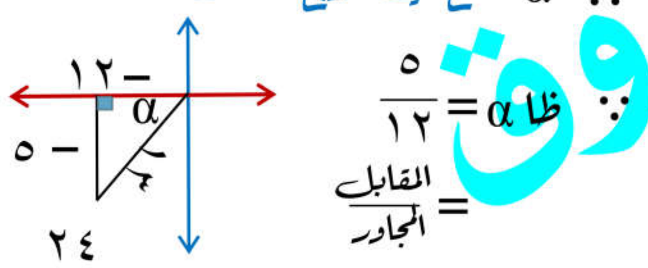
قتا (١٨٠° + α) + جتا (١٨٠° − β)

## الحل

∵ ١٢ ظا α − ٥ = صفر ∴ ظا α = $\frac{٥}{١٢}$

حيث α أكبر زاوية موجبة

∴ α تقع في الربع الثالث




∵ ظا α = $\frac{٥}{١٢}$ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$

∵ ٢٥ جا β − ٢٤ = ٠ ∴ جا β = $\frac{٢٤}{٢٥}$

، ∵ β ∈ ]٩٠°، ١٨٠°[

حيث β تقع في الربع الثاني

(٢٤ ، ٢٥ ، β ، ٧ −)

جا β = $\frac{٢٤}{٢٥}$ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$

قتا (١٨٠° + α) = − قتا α

= − (− $\frac{١٣}{٥}$) = $\frac{١٣}{٥}$

جتا $(180° - \beta)$ = − جتا $\beta$

$= -(\frac{-7}{25}) = \frac{7}{25}$

قتا $(180° + \alpha)$ + جتا $(180° - \beta)$

$= \frac{13}{5} + \frac{7}{25} = \frac{72}{25}$

==============================

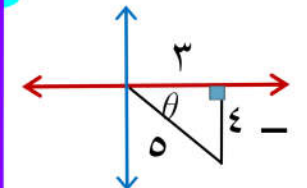
**مثال ٢**

إذا كان : جتا $\theta = \frac{3}{5}$ حيث $270° < \theta < 360°$ فأوجد قيمة المقدار

حا $(180° - \theta)$ + طا $(90° - \theta)$ − طا $(270° - \theta)$

**الحل**

$\theta$ تقع فى الربع الرابع




المقدار =

حا $(180° - \theta)$ + طا $(90° - \theta)$ − طا $(270° - \theta)$

= حا $\theta$ + طتا $\theta$ − طتا $\theta$

= حا $\theta$ = $\frac{-4}{5}$

# تمــــارين

❶ أوجد "$\theta$" حيث $٠° < \theta < ٣٦٠°$ و التي تحقق أن :

① $\theta$ = جتا$^{-١}$ $(\frac{١}{٢})$ ② $\theta$ = جا$^{-١}$ $(\frac{\sqrt{٢}}{٢})$

③ $\theta$ = قتا$^{-١}$ $(-\frac{٢}{\sqrt{٣}})$ ④ $\theta$ = ظتا$^{-١}$ $(١)$

⑤ $\theta$ = قا$^{-١}$ $(٢)$ ⑥ $\theta$ = ظا$^{-١}$ $(-\sqrt{٣})$

---

❷ أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتية حيث $٠° < \theta < ٣٦٠°$

① جا $\theta$ = ٠,٨٦٦٠٣ ② جتا $\theta$ = − ٠,٤٧٥٢

③ ظا $\theta$ = ١,٥٤١٧ ④ قتا $\theta$ = − ١,٢٥٧٦

⑤ قتا $\theta$ = − ١,٨٧١٥ ⑥ قا $\theta$ = ٢,٠٥١٥

⑦ ظا $\theta$ = − ١,٠٨٩٩ ⑧ جتا $\theta$ = − ٠,٧٣٤٩

---

❸ إذا كانت ١٢ ظا هـ = ٥ حيث هـ زاوية حادة فأوجد قيمة كلاً من :

① جتا$^٢$ هـ − جا$^٢$ هـ ② جتا ١٢٠° جا (١٨٠° − هـ) + جا ٥١٠° جتا هـ

---

❹ إذا كانت : ٣ ظا هـ = ٤ حيث هـ ∈ ] ٠° ، ١٨٠° [

فأوجد قيمة المقدار : ٥ جتا هـ + ظا (١٨٠° − هـ) + جتا ١٢٠° − ظا ٣١٥°

---

❺ إذا كانت جا س = $\frac{١٢}{١٣}$ حيث س أكبر زاوية موجبة

فأوجد قيمة المقدار: قتا(١٨٠° − س) ظا س − جتا (١٨٠° + س)

---

❻ إذا كانت ٤ ظا س = ٣ حيث س ∈ ] ط ، $\frac{٣ط}{٢}$ [

، ١٣ جا ص − ١٢ = ٠ حيث ص ∈ ] $\frac{ط}{٢}$ ، ط [

فأوجد قيمة المقدار: $\frac{\text{ظا}(٩٠° - \text{ص})\ \text{جا}(-\text{س}) + \text{جا}\ ٣٠°}{\text{جتا}^٢\ ٤٥° - ٢\ \text{جا}\ ٦٠°\ \text{ظا}\ ٦٠°}$

# كراسة

# الفاروق

## للملاحظات

أ/ عشرى فاروق

# ملاحظات

| الموضوع | | اليوم | | التاريخ | / / ٢٠ |
|---|---|---|---|---|---|

# ملاحظات

| الموضوع | | اليوم | | التاريخ | / / ٢٠ |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |

# ملاحظات

الموضوع | اليوم | التاريخ / / ٢٠

ملاحظات

الموضوع | اليوم | التاريخ / / ٢٠